МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 539.3

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70

https://elibrary.ru/qqfsuq

Градиентные теории упругости и способы идентификации градиентных параметров моделей

Валерий Нагимович Аптуков[1] , Марина Александровна Барулина[2]

[1, 2]Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
[1]aptukov@psu.ru
[2]mab@psu.ru

Аннотация. В связи с разработкой новых нано-структурированных материалов представляют интерес неклассические, в частности, градиентные теории упругости, использование которых считается оправданным для микро- и нано-масштабов в различных практических задачах материаловедения, механике композиционных материалов и др. Данная работа посвящена обзору исследований по градиентным теориям упругости, касающейся как развития общих теоретических подходов, так и применения их к решению различных практических задач. В статье проанализированы работы, где исследовались статические, динамические, тепловые процессы в рамках градиентных теорий упругости; рассмотрены примеры задач использования неклассических теорий упругости для материалов и конструкций с отдельными трещинами, поврежденностью, фазовыми переходами и др. Следует отметить, что особой проблемой в таких задачах является идентификация параметров неклассических моделей, что является нетривиальным в отличие от классической теории упругости. В связи с этим, в статье предлагается оригинальный способ идентификации параметра упрощенной модели градиентной упругости Е. Айфантиса на основе представленного аналитического решения задачи одномерной деформации тяжелого тонкого слоя.

Ключевые слова: *градиентные теории упругости; упрощенные модели, идентификация параметров; деформация тяжелого слоя.*

Для цитирования: Аптуков В. Н., Барулина М. А. Градиентные теории упругости и способы идентификации градиентных параметров моделей // Вестник Пермского университета. Математика. Мехника. Информатика. 2025. № 3(70). С. 54–70. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70. https://elibrary.ru/qqfsuq.

Статья поступила в редакцию 21.07.2025; одобрена после рецензирования 10.09.2025; принята к публикации 26.09.2025.

Research article

Gradient Elasticity Theories and Methods for Identifying Gradient Model Parameters

Valery N. Aptukov[1], Marina A. Barulina[2]

[1, 2]Perm State University, Perm, Russia

[1]aptukov@psu.ru

[2] mab@psu.ru

Abstract. The development of new nano-structured materials contributes to the development of nonclassical, in particular, gradient theories of elasticity. The use of gradient elasticity theories is considered justified for micro- and nano-scales in various practical problems of materials science, mechanics of composite materials, etc. This paper is devoted to a review of research on gradient elasticity theories, concerning both the development of general theoretical approaches and their application to solving various practical problems. The article analyzes works where static, dynamic, and thermal processes were studied within the framework of gradient theories of elasticity; examples of problems of using non-classical theories of elasticity for materials and structures with individual cracks, damage, phase transitions, etc. are considered. It should be noted that a special problem in such problems is the identification of parameters of nonclassical models, which is non-trivial in contrast to the classical theory of elasticity. In this regard, the article proposes an original method for identifying the parameter of the simplified gradient elasticity model by E. Aifantis based on the presented analytical solution to the problem of one-dimensional deformation of a heavy thin layer.

Keywords: *gradient elasticity theories; simplified models, parameter identification; heavy layer deformation.*

For citation: Aptukov, V. N. and Barulina, M. A. (2025), "Gradient Elasticity Theories and Methods for Identifying Gradient Model Parameters", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 54–70, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70, https://elibrary.ru/qqfsuq.

The article was submitted 21.07.2025; approved after reviewing 10.09.2025; accepted for publication 26.09.2025.

Введение

Применение классической теории упругости при оценке напряженно-деформированного состояния некоторого тела ограничено определенным масштабным уровнем рассматриваемого тела (или его части). Обычно это связано с наличием значительных неоднородностей материальных характеристик, начиная с микроуровня и ниже. Для таких объектов необходимо использовать неклассические теории упругости, которые позволяют учитывать нелокальность деформаций. К таким теориям относятся градиентные теории упругости, основной особенностью которых является то, что они учитывают не только деформации, но и их пространственные производные, поэтому уравнения включают тензор моментных напряжений наряду с тензором Коши. Это значительно усложняет постановку и решение задач, получение их аналитических и численных решений.

Настоящая работа содержит обзор исследований по градиентным теориям упругости. В рамках обзора представлены и проанализированы работы, касающиеся как общей теории, так и различных приложений. Также изучены способы идентификации параметров неклассических моделей, что является нетривиальной проблемой в отличие от классической теории упругости. На основе анализа авторами была решена задача одномерной деформации тяжелого тонкого слоя. На основе решения предложенной задачи был предложен оригинальный способ идентификации градиентного параметра.

Общая теория неклассических сред

Первоначальные идеи. В последнее время (начиная с 90-х годов прошлого века) в связи с появлением и разработкой новых материалов, а также благодаря тренду на миниатюризацию электронно-механических систем и их компонентов, активно развиваются теории обобщенного континуума, использующие неклассические определяющие соотношения [1]. Это связано, прежде всего, с необходимостью описания размерных эффектов, в том числе, в нано-структурированных материалах, различных сверхтонких структурах, материалах с большими градиентами неоднородностей, и другими задачами на мезо- и микроуровне [2].

Первоначальные идеи исходят от теории братьев Эжена и Франсуа Коссера [3, 4], называемой в настоящее время *несимметричной теорией упругости* (моментной теорией упругости). Особенности модели Коссера состоят в том, что для каждой частицы среды кроме вектора перемещений вводится еще одна кинематическая переменная – вектор поворота, в связи с чем, наряду с обычными напряжениями в среде возникают также моментные напряжения.

Дальнейшее развитие теории Коссера началось с классической работы К. Трусделла и его ученика Дж. Эриксена [5]. Современная трактовка континуальной модели, включающей эффекты второго порядка, дана в работе [6]. Позднее Р. Тупин получил аналогичные определяющие уравнения для конечных деформаций [7]. Далее эти идеи развивались в работах Р. Миндлина [8], Э. Аэро и Е. Кувшинского [9], В. Пальмова [10] и др.

Модели нелокальной упругости. Модели основаны на предположении, что силы между материальными точками могут иметь дальнодействующий характер, что отражает дальнодействующий характер межатомных взаимодействий. Э. Кренер дал физическое обоснование нелокальной теории на основе теории дислокаций [11,12]. А. Эринген и Д. Эделен получили определяющие уравнения нелокальной теории на основе вариационного подхода [13]. Физические основы нелокальной упругости обобщены в работе И. Кунина [14]. Вариационный подход к выводу достаточно общих уравнений нелокальной градиентной теории высокого порядка представлен в работе [15].

Развитие общей теории. Общие вопросы градиентной теории упругости рассматривались отечественными учеными. Так, С. Лурье и В. Васильев в работе [16] указывают на необходимость формулировки условий симметрии, аналогичным требованиям к тензору жесткости анизотропного тела в классической теории упругости. Это симметрия по перестановке индексов в первой и второй паре индексов, а также при перестановке этих пар. Последнее требование вытекает из условия существования потенциала упругой энергии. Авторы развивают подобные требования применительно к градиентным теориям упругости с целью получения корректных физических уравнений.

Вариационная формулировка градиентной анизотропной теории упругости представлена в работе [17]. Наряду с классическим тензором анизотропных модулей четвертого ранга предложено ввести вектор размерности длины.

Некоторые работы посвящены развитию градиентной теории при конечных деформациях. Например, показано, что условия эллиптичности уравнений градиентной теории упругости при конечных деформациях, когда плотность энергии деформации является функцией первого и второго градиента вектора градиента места, накладывает определенные ограничения на касательные модули [18].

Особенности неклассических моделей. Развиваемые модели позволяют учитывать масштабные эффекты, поскольку определяющие соотношения включают градиентные параметры, соотносимые с размерными параметрами исследуемой области, например, с размерами зерна (дефекта), толщиной покрытия и т.п. Модели позволяют получать регулярные решения в окрестности острых трещин (так называемых особых точек), более гладкие решения для многокомпонентных (зернистых) материалов с микро- и нановключениями, рассматривать адгезионные эффекты, масштабные эффекты и др.

Поскольку плотность энергии деформации в неклассических моделях зависит не только от тензора деформаций, но и от градиента деформации первого (второго и т.д.) порядка, это приводит к уравнениям более высокого порядка, чем в классической теории упругости. Данное обстоятельство усложняется требованием формулировки дополнительных граничных условий, а также определением множества дополнительных параметров модели. Все это является определенной "платой" за новые возможности градиентных теорий.

Упрощенные модели градиентной упругости. На практике используются, как правило, упрощенные (прикладные) градиентные модели с малым количеством параметров, в частности, однопараметрические модели, наиболее распространенной из которых является вариант Е. Айфантиса [19]. Другим вариантом упрощенной (одно- и двухпараметрической) модели является подход В. Васильева, С. Лурье [16, 20]. Этими же авторами в работе [21] представлена новая однопараметрическая модель обобщенной теории упругости. Рассмотрены постановки задач различной размерности.

Подобные модели и используются в основном в различных приложениях, например [22, 23]. Таким образом, максимально упрощенный вариант физических уравнений одномерной градиентной теории упругости (вариант Е. Айфантиса [19]) выглядит следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon + LE\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \tag{1}$$

где E – модуль упругости; L – градиентный параметр, имеющий размерность длины.

Применение неклассических теорий упругости к решению различных задач

Задачи деформирования балок, пластин с концентраторами. К настоящему времени в рамках градиентной теории упругости решено достаточно много различных прикладных задач. Решение статических задач изгиба стержня представлены в работах [19, 23–25 и др.], а деформации цилиндра в работах [26, 27 и др.]. Задачи изгиба пластин, растяжения пластины с отверстием и подобных рассматривались в работах [28–29 и др.]. Авторами статьи [30] в рамках континуума Коссера проведен анализ аналитического решения задачи Кирша и показано отличие классического и неклассического решений.

Задачи теории трещин. Классическая линейная упругость приводит к бесконечно большим напряжениям в вершине острой трещины, а поскольку сингулярность напряжений не является реальной, то в этом случае классические критерии разрушения не применимы. Градиентная теория устраняет сингулярность напряжений, что приводит к определенным преимуществам описания [31].

Подробное применение моментной теории упругости к задачам трещинами изложено в монографии Н. Морозова [32]. Новый вид решения плоской задачи градиентной теории упругости при наличии острой трещины представлен в [33].

Задачи механики композиционных материалов, наноматериалов. Градиентные теории упругости применяются при анализе напряженного состояния в тонких покрытиях (слоях) в композиционных материалах. В частности, в работе [34] рассмотрены тонкие покрытия, применяемые в авиакосмической области. Модель материалов со сферическими анизотропными наночастицами представлена в работе [35]. Изгиб консольных нано-трубок с целью разработки резонаторов изучался в работе [36]. В работе [37] рассматривается модель композиционного материала, армированного двунаправленными волокнами, описывающая плавные переходы полей сдвиговых деформаций.

Динамические задачи. Применение градиентной теории упругости при описании различных динамических эффектов, в частности колебаний, приводит к различным эффектам. Так, многие авторы отмечают, что когда толщина микро-пластины сравнима с масштабным параметром модели, увеличивается собственная частота колебаний, например [38]. Аналогичный эффект наблюдается и для продольных колебаний нано-стержня [39].

Нелинейные продольные и сдвиговые волны деформации, распространяющиеся в градиентно-упругой среде, изучаются в работе [40]. Колебания полосы с отслоением в рамках однопараметрической модели Е. Айфантиса рассмотрены авторами работы [41], где получены смешанные полуаналитические решения для градиентной упругости.

Динамические задачи для микро- и нано-объектов часто возникают в связи с разработкой различных нано-электромеханических систем (датчиков), например [42]. В подобных задачах необходимо учитывать влияние нано-размерных эффектов, что было сделано в работе [43], где рассматривались колебания круглой ортотропной пластины с учетом эффектов градиентной упругости.

Градиентная теплопроводность и термоупругость. Значительная часть работ посвящена полусвязанным термоупругим задачам, когда температурное поле определяется по обычным классическим законам, а напряженно-деформированное состояние, индуцированное тепловыми эффектами – по градиентной теории упругости. Как всегда широко используется однопараметрическая теория Е. Айфантиса.

В работе А. Ватульян с соавторами [44] приведено решение термоупругой задачи для цилиндра с термозащитным покрытием, отмечается необходимость учета влияния градиентного параметра при оценке прочности покрытия. Аналогичная термоупругая плоская задача рассмотрена также в работе [45].

Развитие вариационного принципа Л. Седова для построения различных диссипативных моделей, позволяющее получить обобщение различных законов теплопроводности, в том числе градиентную модель теплообмена, предлагается в работе [46].

Задачи с поврежденностью, фазовыми превращениями и др. Уравнения неравновесной термодинамики с внутренними параметрами состояния для градиентной теории упругости представлены P. Van в работе [47]. Вариант градиентной теории упругости со скалярным параметром поврежденности развивается в работе [48]. Модель дилатационной теории упругости применительно к чистому изгибу балки, соответствующая частному случаю среды с микроструктурой Миндлина, развивается в работе [49].

Задачи электроупругости в рамках градиентной упругости рассмотрены в работах А. Ватульян с соавторами [50,51]. Оценка напряженно-деформированного состояния, индуцированного фазовым превращением в магнии на основе градиентной теории упругости, проведена в работе [52], где получено аналитическое решение для одноосной деформации тонкого слоя.

Идентификация параметров неклассических теорий упругости. Для практического применения градиентных теорий требуется разработка достоверных методов идентификации дополнительных материальных констант. Идентификация параметров может осуществляться различным образом, в литературе выделяются несколько основных подходов.

Сравнение результатов континуального и дискретно-атомистического моделирования проведено в работе [53]. Использование потенциалов межатомного взаимодействия позволяет определять параметры градиентной теории, приводится пример идентификации для двухфазного композита W-Si [54].

Испытания образцов с различной длиной нанесенных трещин или с различным размером дефектов (метод Васильева–Лурье) предполагает сравнение соответствующих расчетных и экспериментальных данных, в том числе измерение двухмерного или трехмерного поля деформаций вблизи дефектов на поверхности образца [55]. Подобный подход обсуждается в работе [56].

Наиболее распространенным подходом является аналогичный подход, когда оценка параметров для микро- и нано-композиционных структур производится путем измерения поля деформаций (измерение двухмерного или трехмерного поля координат на поверхности образца) изучаемого объекта и сравнения данных с численными (в частном случае, аналитическими) результатами. Такие подходы отражены в различных работах, например [57, 58].

Ниже будет рассмотрена задача деформации тонкого слоя под действием собственного веса для физических уравнений Е. Айфантиса, решение которой в совокупности с инструментальными измерениями позволяет идентифицировать градиентный параметр.

Одноосная деформация тяжелого слоя

Рассмотрим одноосную деформацию тонкого слоя толщиной $z_1 < 1$мкм под действием силы тяжести. Такая задача позволяет получить аналитическое решение и может служить основой для оценки градиентного параметра при наличии соответствующего инструментального сопровождения.

Связь между напряжениями и деформациями для максимально простого варианта градиентной теории упругости (Е. Айфантис, [19]) в одномерном варианте (одноосной деформации вдоль оси z, рис. 1) для декартовой системы координат можно записать как

$$\sigma_z = E\varepsilon_z + LE\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}, \tag{2}$$

где E – модуль упругости; L – градиентный параметр, имеющий размерность длины; σ_z, ε_z – компоненты тензора напряжений и деформаций, соответственно.

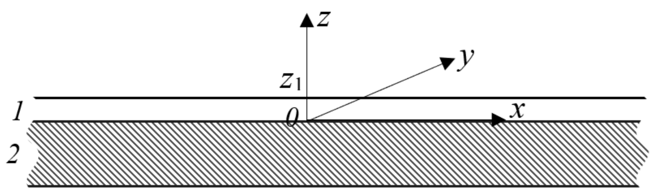

Рис. 1. *Одноосная деформация тонкого тяжелого слоя (1), лежащего на абсолютно твердом основании (2)*

Рассмотрим тяжелый однородный слой (рис. 1), расположенный в диапазоне

$$-\infty \le x \le +\infty;\ -\infty \le y \le +\infty;\ 0 \le z \le z_1, \tag{3}$$

тогда с учетом направления оси z от точки 0 в сторону z_1

$$\sigma_z = -\gamma(z_1 - z), \tag{4}$$

где γ – удельный вес.

Общее решение уравнения (2) с учетом (4) имеет вид

$$\varepsilon_z = Cexp\left(-\frac{z}{L}\right) + \frac{\gamma}{E}(z - z_1 - L). \tag{5}$$

Интегрируя (5), получим общее выражение для перемещения:

$$u_z = -CLexp\left(-\frac{z}{L}\right) + \frac{\gamma}{2E}(z - z_1 - L)^2 + C_1. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования C, C_1 в решении (6) определяются из граничных условий на границах слоя. Классическое граничное условие касается перемещения на границе $u_z(z = 0) = 0$. Откуда следует, что

$$C_1 = CL - \frac{\gamma}{2E}(z_1 + L)^2. \tag{7}$$

Возникает вопрос о дополнительном граничном условии для определения постоянной C. Казалось естественно предположить, что на свободной границе z_1 деформация $\varepsilon_z(z = z_1) = 0$, что приводит к условию $\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}(z = z_1) = 0$ согласно (2), и соответствует отсутствию напряжения на свободной границе $\sigma_z(z = z_1) = 0$. В этом случае выражение для деформации принимает вид

$$\varepsilon_z = \frac{\gamma L}{E} exp\left(\frac{z_1 - z}{L}\right) + \frac{\gamma}{E}(z - z_1 - L). \tag{8}$$

Анализ выражения (8) показывает, что деформация является положительной $\varepsilon_z > 0$, что, конечно, не имеет физического смысла, поскольку слой сжимается под действием силы тяжести.

Следовательно, необходимо задавать деформацию (или ее производную) на границе $z = 0$, где отсутствуют перемещения. Вариант граничного условия $\varepsilon_z(z = 0) = 0$ также приводит к не физическому следствию $\varepsilon_z > 0$. Подходящим вариантом является требование $\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}(z = 0) = 0$ для которого постоянная $C = \frac{\gamma L}{E}$. В этом случае деформация и перемещение принимают вид:

$$\varepsilon_z = \frac{\gamma L}{E} exp\left(-\frac{z}{L}\right) + \frac{\gamma}{E}(z - z_1 - L); \tag{9}$$

$$u_z = \frac{\gamma L^2}{E}\left[1 - exp\left(-\frac{z}{L}\right)\right] + \frac{\gamma}{2E} z(z - 2z_1 - 2L). \tag{10}$$

Полученные выражения (9), (10) можно представить в безразмерном виде:

$$\varepsilon_z = \pi_1 \pi_2 exp\left(-\frac{\zeta}{\pi_2}\right) + \pi_1(\zeta - \pi_2 - 1); \tag{11}$$

$$u_z/z_1 = \pi_1 \pi_2^2 \left\{1 - exp\left(-\frac{\zeta}{\pi_2}\right)\right\} + \frac{1}{2}\pi_1 \zeta(\zeta - 2\pi_2 - 2), \tag{12}$$

где $\pi_1 = \frac{\gamma z_1}{E}$, $\pi_2 = \frac{L}{z_1}$, $\zeta = \frac{z}{z_1}$.

Распределение деформации (11) по толщине слоя при $\pi_1 = 0{,}01$ для различных значений параметра π_2 (соответственно, градиентного параметра L) показано на рис. 2.

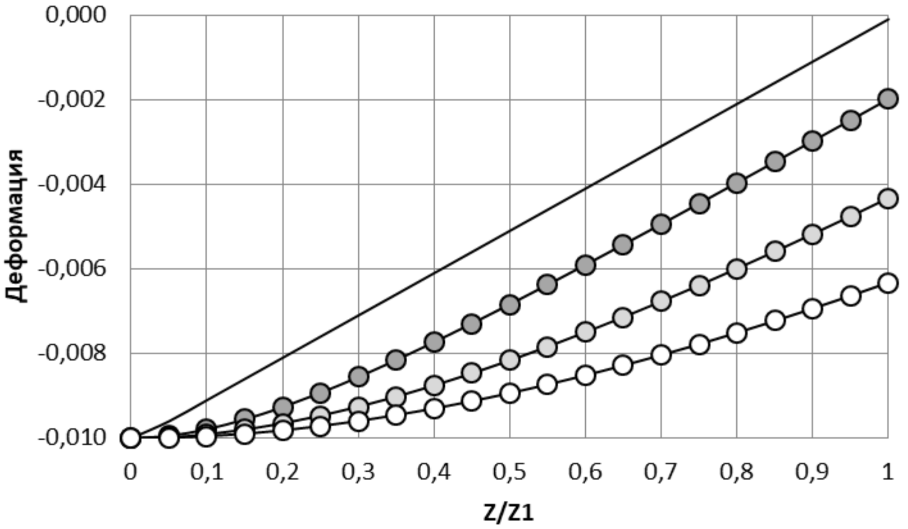

Рис. 2. *Распределение деформации по толщине тяжелого слоя:* $\pi_2 = 1$ *– белый круг; 0,5 – светло-серый круг; 0,2 – темно-серый круг; 0,01 – линия без маркера (классическое решение)*

Наблюдается сильное отличие классического решения от решений согласно градиентной теории при различных параметрах $\pi_2(L)$.

Распределение относительного перемещения (12) по толщине слоя при тех же параметрах показано на рис. 3.

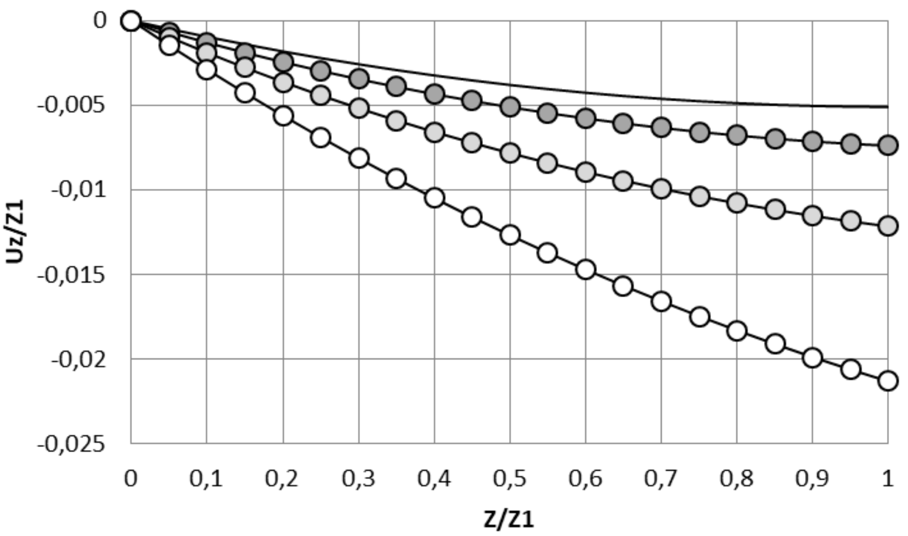

Рис. 3. *Распределение относительного перемещения по толщине тяжелого слоя:* $\pi_2 = 1$ *– белый круг; 0,5 – светло-серый круг; 0,2 – темно-серый круг; 0,01 – линия без маркера (классическое решение)*

Видно, что на свободной границе тяжелого слоя отличия в перемещениях по градиентной и классической теории могут достигать от 1,5 до 4 раз. Подобные отличия могут быть замерены инструментально с целью определения градиентного параметра L.

Например, для низкомодульного материала (полимер, клей) при толщине слоя z_1 около 1 мм величина π_1 может достигать 10^{-4}. При этом значении π_1 расчеты по представленной модели дают величину максимального перемещения границы слоя $u_z(z_1 = 1) = 0{,}5$ мкм для $\pi_2 = 0{,}01$ (классическое решение) и $u_z(z_1 = 1) = 2$ мкм для $\pi_2 = 1$ (градиентная теория).

Пусть тонкий слой низкомодульного материала приклеен к массивной пластине. Пусть толщина низкомодульного слоя в случае, когда массивная пластина находится внизу, равна h_1. А соответствующая толщина, когда массивная пластина находится вверху, равна h_2. Тогда

$$h_2 - h_1 = 2u_z(z_1 = 1). \tag{13}$$

Именно собственный вес слоя определяет разность величин $h_2 - h_1$ в (13), которая находится в пределах от 1 мкм до 4 мкм, что может быть замерено инструментально. В зависимости от полученного результата (в том числе с помощью графиков рис. 2) можно оценить величину π_2 и градиентный параметр L.

Заключение

Представлен обзор исследований по неклассическим (градиентным) теориям упругости. Рассмотрены вопросы общей теории и различные приложения, в частности, использование упрощенных моделей применительно к микро- и нано-структурным материалам. Отдельное внимание уделено методам идентификации параметров градиентных моделей.

В рамках упрощенной модели Е. Айфантиса поставлена и решена задача одномерной деформации тонкого слоя под действием собственного веса. Предложен способ определения градиентного параметра на основе полученного решения.

Список источников

1. *Трусов П. В., Швейкин А. И.* Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2019. 605 с. DOI: 10.15372/MULTILEVEL2019TPV. ISBN: 978-5-7692-1661-9. EDN: BCSSTZ.
2. *Лурье С. А., Соляев Ю. О.* Метод идентификации параметров градиентных моделей неоднородных структур с использованием дискретно-атомистического моделирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 89–112. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.06. EDN: SXDTNX.
3. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps deformables. Paris: A. Hermann, 1909. 226 p.
4. *Ерофеев В. И., Герасимов С. И.* Континуума Коссера сто лет спустя // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5, № 1. С. 3–4.
5. *Ericksen J. L., Truesdell C.* Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1. P. 295–323. DOI: 10.1007/bf00298012. EDN: AKLXGG.
6. *Truesdell C., Toupin R. A*. The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, vol III/l, Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1960. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

7. *Toupin R. A.* Elastic Materials with Couple Stresses, Arch. Rational Mech. and Anal. 1962. Vol. 11. P. 385–414. DOI: 10.1007/bf00253945. EDN: YMFBWU.
8. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 16. P. 51–78. DOI: 10.1007/bf00248490. EDN: UUTPGW.
9. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В*. Континуальная теория асимметричной теории упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твердого тела. 1964. Т. 6, вып. 9. С. 2689–2699.
10. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401–408.
11. *Kroner E.* Elasticity Theory of Materials with Long Range Cohesive Forces // International Journal of Solids and Structure. Vol. 3. 1967. P. 731–743. DOI: 10.1016/0020-7683(67)90049-2.
12. *Kroner E.* Dislocation field theory. Theory of cristal defects. New York, 1966.
13. *Kunin I. A.* Elastic Media with Microstructure, Springer Verlag, Berlin, 1983. DOI: 10.1007/978-3-642-81960-5.
14. *Eringen A. C. and Edelen D. G. B.* On Nonlocal Elasticity // International Journal of Engineering Science. Vol. 10. 1972. P. 233–248. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90039-0.
15. *Faghidian S. A.* Higher-order nonlocal gradient elasticity: a consistent variational theory // International Journal of engineering science. 2020. T. 154. P. 103337. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103337. EDN: CSOFWI.
16. *Васильев В. В., Лурье С. А.* О корректных нелокальных обобщенных теориях упругости // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19, № 1. С. 47–59. EDN: VSMFNF.
17. *Белов П. А., Лурье С. А.* Развитие концепции "разделенной анизотропии" в теории градиентной анизотропной упругости // Механика композитных материалов. 2021. Т. 57, № 4. С. 611–628. DOI: 10.22364/mkm.57.4.01. EDN: IVOVKD.
18. *Еремеев В. А.* Об эллиптичности уравнений равновесия градиентной теории упругости и устойчивости в малом // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68), вып. 1. С. 99–108. DOI: 10.21638/spbu01.2023.109. EDN: KHXUVH.
19. *Altan B. S., Aifantis E. C.* On Some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 1997. Vol. 8, № 3. P. 231–282. DOI: 10.1515/JMBM.1997.8.3.231.
20. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Модель сплошной среды с микроструктурой // Композиты и наноструктуры. 2015. Т. 7, № 1. С. 2–10. EDN: TPKWUN.
21. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Обобщенная теория упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 16–27. EDN: UXVZDR.
22. *Askes H., Aifantis E. C.* Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // International Journal of Solids and Structures. 2011. T. 48. P. 1962–1990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006. EDN: OKODVR.
23. *Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О.* Полуобратное решение задачи чистого изгиба балки в градиентной теории упругости: отсутствие масштабных эффектов // Доклады РАН. 2018. Т. 479, № 4. С. 390–394. DOI: 10.7868/S0869565218100079. EDN: YWMUMX.
24. *Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О.* Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах теории упругости за счет градиентных эффектов // Доклады РАН. 2019. Т. 489, № 6. С. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591. EDN: KETOXA.

25. *Лурье С. А.* О парадоксе аномальной относительной изгибной жесткости сверхтонких балок в градиентной теории упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 3. С. 48–57. DOI: 10.31857/S0572329920030095. EDN: LADRAR.
26. *Gao X. L., Park S. K.* Variational formulation of simplifies strain gradient elasticity theory and its application to pressurized thick-walled cylinder problem // Int. Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 7486–7499. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022. EDN: KETIPD.
27. *Collin F., Caillerie D., Chambon R.* Analytical solution for the thick-walled cylinder problem modelled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation // Int. Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. P. 3927–3937. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.05.017.
28. *Короленко В. А., Соляев Ю. О.* Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости // Труды Московского авиационного института. 2021. № 121. С. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04. EDN: JKCWSF.
29. *Mousavi S. M., Paavola J.* Analysis of plate in second strain gradient elasticity // Arch. Applied Mechanics 2014. Vol. 84. P. 1135–1143. DOI: 10.1007/s00419-014-0871-9. EDN: AZYTNM.
30. *Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.* Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, №. 4. С. 145–154. EDN: ONVVRD.
31. *Eringen A. C., Spezialle C. G., Kim B. S.* Crack Tip Problems in Nonlocal Elasticity // J. Mechanics and Physics of Solids. 1972. Vol. 25. P. 339–355.
32. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
33. *Lurie S. A., Volkov-Bogorodsky D. B., Vasiliev V. V.* A new approach to non-singular plane cracks theory in gradient elasticity // Mathematical and computational applications. 2019. Т. 24, № 4. P. 24040093. DOI: 10.3390/mca24040093. EDN: JSPDPK.
34. *Лурье С. А., Соляев Ю. О., Рабинский Л. Н., Кондратова Ю. Н., Волов М. И.* Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости слоя // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. № 1. С. 161–181. EDN: PYXMRN.
35. *Karami B., Janghorban M., Tounsi A.* Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles // Steel and composite structures. 2018. Т. 27, № 2. P. 201–216. DOI: 10.12989/scs.2018.27.2.201. EDN: VINXEY.
36. *Arda M.* Buckling analysis of intermediately supported nanobeams via strain gradient elasticity theory // International journal of engineering and applied science. 2020. Т. 12, № 4. P. 163–172. DOI: 10.24107/ijeas.842499. EDN: NRPQHX.
37. *Kim C. I., Zeidi M.* Gradient elasticity theory for fiber composites with fibers resistant to extension and flexure // International journal of engineering science. 2018. Т. 131. P. 80–99. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.06.002. EDN: YIAPTF.
38. *Ramezani Sh.* Nonlinear vibration analysis of micro-plates based on strain gradient elasticity theory // Nonlinear dynamics. 2013. Т. 73, № 3. P. 1399–1421. DOI: 10.1007/s11071-013-0872-1. EDN: IHJZKV.
39. *Uzun B., Civalek Ö., Yayli M. Ö.* Анализ продольных колебаний функционально-градиентного наностержня при различных условиях защемления на основе нелокальной теории упругости с учетом жесткости // Физическая мезомеханика. 2023. Т. 26, № 1. С. 60–77. DOI: 10.55652/1683-805X_2023_26_1_60. EDN: UHMKLZ.

40. *Ерофеев В. И., Шешенина О. А.* Нелинейные продольные и сдвиговые стационарные волны деформации в градиентно-упругой среде // Математическое моделирование систем и процессов. 2007. № 15. С. 15–27. EDN: PAXXAX.
41. *Ватульян А. О., Явруян О. В.* Колебания полосы с отслоением в рамках однопараметрической модели Айфантиса градиентной теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 3. С. 70–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.08. EDN: IWCMUN.
42. *Барулина М. А., Голиков А. В., Панкратова Е. В., Маркелова О. В.* Исследование влияния структуры подвеса инерционной массы стеклянного микромеханического акселерометра на его характеристики // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 1(68). С. 41–51. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-41-51. EDN: DVYPDM.
43. *Barulina M., Kondratov D., Galkina S., Markelova O.* Analytical Solution for Bending and Free Vibrations of an Orthotropic Nanoplate based on the New Modified Couple Stress Theory and the Third-order Plate Theory // Journal of Mathematical and Fundamental Sciences. 2022. Vol. 54(1). P. 11–38. DOI: org/10.5614/j.math.fund.sci.2022.54.1.2. EDN: TMDNMI.
44. *Ватульян А. О., Нестеров С. А., Юров В. О.* Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 3. С. 253–263. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21. EDN: DDVVWM.
45. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Ученые записки Казанского университета. Серия "Физико-математические науки". 2021. Т. 163, кн. 2. С. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196. EDN: DDVVWM.
46. *Белов П. А., Лурье С. А.* Вариационная формулировка градиентной необратимой термодинамики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 5. С. 36–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.04. EDN: OTLSML.
47. *Van P.* Thermodynamically consistent gradient elasticity with an internal variable // Theoretical and applied mechanics. 2020. Vol. 47, Is. 1. P. 1–17. DOI: https://doi.org/10.2298/TAM200204006V.
48. *Лурье С. А., Белов П. А., Ожерелков Д. А.* Моделирование поврежденности механических свойств материалов в обобщенной градиентной теории упругости // Упругость и неупругость (материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел). М.: Изд-во МГУ, 2021. С. 270–276. EDN: LSRMGP.
49. *Соляев Ю. О., Лурье С. А., Волков А. В*. Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 137–152. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.12. EDN: ZBPCXN.
50. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Масштабно-зависимая модель электроупругости для сплошного цилиндра с покрытием // Владикавказский математический журнал. 2023. Т. 25, вып. 4. С. 29–40. DOI: 10.46698/q5632-5654-3734-n. EDN: MKHUBF.
51. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Градиентные модели деформирования составных электроупругих тел // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 5. С. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01. EDN: MSKRGO.

52. *Аптуков В. Н., Скрябина Н. Е., Фрушар Д.* Анализ упругих деформаций, индуцированных гидридным превращением в магнии, в рамках градиентной теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2025. № 3. С. 19–28. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.02.
53. *Лурье С. А., Соляев Ю. О.* Метод идентификации параметров градиентных моделей неоднородных структур с использованием дискретно-атомистического моделирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 89–112. EDN: SXDTNX.
54. *Лурье С. А., Соляев Ю. О.* Определение параметров градиентной теории упругости по потенциалам межатомного взаимодействия, учитывающим модифицированное правило Лоренца-Бертло // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19 (3). С. 39–46. EDN: WCLPNV.
55. *Васильев В. В., Лурье С. А., Салов В. А.* Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 4. С. 5–12. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001. EDN: XWCGMH.
56. *Askes H., Susmel L.* Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2015. Vol. 38, №. 2. P. 154–160. DOI: 10.1111/ffe.12183.
57. *Лурье С. А., Посыпкин М. А., Соляев Ю. О.* Метод идентификации масштабных параметров градиентной теории упругости на основе численных экспериментов для плоских композиционных структур // International Journal of Open Information Technologies. 2015. Vol. 3, № 6. P. 1–5. EDN: TTTTVH.
58. *Короленко В. А., Соляев Ю. О.* Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости // Труды Московского авиационного института. 2021. № 121. С. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04. EDN: JKCWSF.

References

1. Trusov, P. V. and Shveikin, A. I. (2019), *Multilevel Models of Mono- and Polycrystalline Materials: Theory, Algorithms, and Application Examples*, Novosibirsk, SO Russian Academy of Sciences, 605 p.
2. Lurie, S. A. and Solyev, Yu. O. (2014), "A method for identifying the parameters of gradient models of heterogeneous structures using discrete-atomic modeling", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 89–112.
3. Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909), *Theorie des corps deformables*, A. Hermann, Paris, France, 226 p.
4. Erofeev, V. I. and Gerasimov, S. I. (2013), "The Kosserat Continuum One Hundred Years Later", *Radio electronics. Nanosystems. Information technologies*, vol. 5, no 1, pp. 3–4.
5. Ericksen, J. L. and Truesdell, C. (1957), "Exact theory of stress and strain in rods and shells", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 1, pp. 295–323.
6. Truesdell, C. and Toupin, R. A. (1960), "The Classical Field Theories", *Handbuch der Physik*, vol III/l, Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer Verlag.
7. Toupin, R. A. (1962), "Elastic Materials with Couple Stresses", *Arch. Rational Mech. and Anal*, vol.11, pp. 385–414.
8. Mindlin, R. D. (1964), "Micro-structure in linear elasticity", *Arch. Rational Mech. Anal*, vol. 16, pp. 51–78.

9. Aero, E. L. and Kuvshinsky, E. V. (1964), "Continuum theory of asymmetric elasticity theory. Equilibrium of an isotropic body", *Solid State Physics*, vol. 6, no 9, pp. 2689–2699.
10. Palmov, V. A. (1964), "Basic equations of the theory of asymmetric elasticity", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 28, no 3, pp. 401–408.
11. Kroner, E. (1967), "Elasticity Theory of Materials with Long Range Cohesive Forces", *International Journal of Solids and Structure*, vol. 3, pp. 731–743.
12. Kroner, E. (1966), "Dislocation field theory", *Theory of cristal defects*, New York.
13. Kunin, I. A. (1983), "Elastic Media with Microstructure", *Springer Verlag*, Berlin.
14. Eringen, A. C. and Edelen, D. G. B. (1972), "On Nonlocal Elasticity", *International Journal of Engineering Science*, vol. 10, pp. 233–248.
15. Faghidian, S. A. (2020), "Higher-order nonlocal gradient elasticity: a consistent variational theory", *International Journal of Engineering Science*, vol. 154, pp. 103337. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103337.
16. Vasiliev, V. V. and Lurie, S. A. (2016), "On Correct Non-Local Generalized Elasticity Theories", *Physical Mesomechanics*, vol. 19, no 1, pp. 47–59.
17. Belov, P. A. and Lurie, S. A. (2021), "Development of the concept of "split anisotropy" in the theory of gradient anisotropic elasticity", *Mechanics of Composite Materials*, vol. 57, no 4, pp. 611–628. https://doi.org/10.22364/mkm.57.4.01.
18. Eremeev, V. A. (2023), "On the ellipticity of the equilibrium equations of the gradient theory of elasticity and stability in the small", *Bulletin of St. Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, vol. 10 (68), no 1, pp. 99–108. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.109.
19. Altan, B. S. and Aifantis, E. C. (1997), "On Some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity", *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, vol. 8, no 3, pp. 231–282.
20. Vasiliev, V. V. and Lurie, S. A. (2015), "A continuous medium model with a microstructure", *Composites and Nanostructures*, vol. 7, no 1, pp. 2–10.
21. Vasiliev, V. V. and Lurie, S. A. (2015), "Generalized theory of elasticity", *News of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics*, no 4, pp. 16–27.
22. Askes, H. and Aifantis, E. C. (2011), "Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, pp. 1962–1990.
23. Lomakin, E. V., Lurie, S. A., Rabinsky, L. N. and Solyaev Yu. O. (2018), "Semi-inverse solution of the pure bending problem of a beam in the gradient theory of elasticity: absence of scale effects", *Russian Academy of Sciences Reports*, vol. 479, no 4, pp. 390–394. DOI:10.7868/S0869565218100079.
24. Lomakin, E. V., Lurie, S. A., Rabinsky, L. N., Solyaev Yu. O. (2019), "On the refinement of the stress state in applied problems of elasticity theory due to gradient effects", *Russian Academy of Sciences Reports,* vol. 489, no 6, pp. 585–591. DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524896585-591.
25. Lurie, S. A. (2020), "On the Paradox of Anomalous Relative Flexural Stiffness of Ultra-Thin Bridges in the Gradient Theory of Elasticity", *News of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no 3, pp. 48–57. DOI: 10.31857/S0572329920030095.
26. Gao, X. L., Park, S. K. (2007), "Variational formulation of simplifies strain gradient elasticity theory and its application to pressurized thick-walled cylinder problem", *Int. Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 7486–7499.

27. Collin, F., Caillerie, D., Chambon, R. (2009), "Analytical solution for the thick-walled cylinder problem modelled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation", *Int. Journal of Solids and Structures*, vol. 46, pp. 3927–3937.
28. Korolenko, V. A. and Solyaev Yu. O. (2021), "Estimation of stress concentration levels near micro-sized holes based on simplified models of gradient elasticity theory", *Proceedings of the Moscow Aviation Institute*, no 121, pp. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04.
29. Mousavi, S. M. and Paavola, J. (2014), "Analysis of plate in second strain gradient elasticity", *Arch. Applied Mechanics*, vol. 84, pp. 1135–1143. DOI: 10.1007/s00419-014-0871-9.
30. Kulesh, M. A., Matveenko, V. P. and Shardakov, I. N. (2001), "Construction and analysis of an exact analytical solution to the Kirsch problem within the framework of the Kossera continuum and pseudo-continuum", *Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 42, no 4, pp. 145–154.
31. Eringen, A. C., Spezialle, C. G. and Kim, B. S. (1972), "Crack Tip Problems in Nonlocal Elasticity", *J. Mechanics and Physics of Solids*, vol. 25, pp. 339–355.
32. Morozov, N. F. (1984), *Mathematical Issues of Crack Theory*, Nauka, Moscow, Russia, 256 p.
33. Lurie, S. A., Volkov-Bogorodsky, D. B. and Vasiliev, V. V. (2019), "A new approach to non-singular plane cracks theory in gradient elasticity", *Mathematical and computational applications*, vol. 24, no 4, pp. 24040093. DOI: 10.3390/mca24040093.
34. Lurie, S. A., Solyiev, Yu., O., Rabinsky, L. N., Kondratova, Yu. N. and Volov, M. I. (2013), "Modeling the stress-strain state of thin composite coatings based on solving the plane problem of the layer gradient elasticity theory", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 1, pp. 161–181.
35. Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2018), "Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles", *Steel and composite structures*, vol. 27, no 2, pp. 201–216. DOI: 10.12989/scs.2018.27.2.201.
36. Arda, M. (2020), "Buckling analysis of intermediately supported nanobeams via strain gradient elasticity theory", *International Journal of Engineering and Applied Science*, vol. 12, no 4, pp. 163–172. DOI: 10.24107/ijeas.842499.
37. Kim, C.I. and Zeidi, M. (2018), "Gradient elasticity theory for fiber composites with fibers resistant to extension and flexure", *International Journal of Engineering Science*, vol. 131, pp. 80–99. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.06.002.
38. Ramezani, Sh. (2013), "Nonlinear vibration analysis of micro-plates based on strain gradient elasticity theory", *Nonlinear Dynamics*, vol. 73, no 3, pp. 1399–1421.
39. Uzun B., Civalek Ö. and Yayli M. Ö. (2023), "Analysis of longitudinal vibrations of a functionally graded nanorod under various clamping conditions based on non-local elasticity theory taking into account stiffness", *Physical Mesomechanics*, vol. 26, no 1, pp. 60–77. DOI: 10.55652/1683-805X_2023_26_1_60.
40. Erofeev, V. I. and Sheshenina, O. A. (2007), "Nonlinear longitudinal and shear stationary deformation waves in a gradient-elastic medium", *Mathematical Modeling of Systems and Processes*, no 15, pp. 15–27.
41. Vatulyan, A. O. and Yavruyan, O. V. (2022), "Fluctuations of a strip with delamination within the framework of the one-parameter Aifantis model of gradient elasticity theory", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 70–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.08.
42. Barulina, M. A., Golikov A. V., Pankratova, E. V. and Markelova, O. V. (2025), "Study of the effect of the inertial mass suspension structure of a glass micromechanical accelerometer on its characteristics", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(68), pp. 41–51. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-41-51.

43. Barulina, M., Kondratov, D., Galkina, S. and Markelova, O. (2022), "Analytical Solution for Bending and Free Vibrations of an Orthotropic Nanoplate based on the New Modified Couple Stress Theory and the Third-order Plate Theory", *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, vol. 54(1), pp. 11–38. DOI:org/10.5614/j.math.fund.sci.2022.54.1.2.
44. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. and Yurov, V. O. (2021), "Solution of the gradient thermoelasticity problem for a cylinder with a thermal coating", *Computational Continuum Mechanics*, vol. 14, no 3, pp. 253–263. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.
45. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. (2021), "Solution of the gradient thermoelasticity problem for a coated strip", *Scientific Notes of Kazan University. Series "Physical and Mathematical Sciences"*, vol. 163, book 2, pp. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.
46. Belov, P. A. and Lurie, S. A. (2023), "Variational formulation of gradient irreversible thermodynamics", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 5, pp. 36–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.04.
47. Van P. (2020), "Thermodynamically consistent gradient elasticity with an internal variable", *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 47, is. 1, pp. 1–17. DOI: https://doi.org/10.2298/TAM200204006V.
48. Lurie, S. A., Belov, P. A. and Ozherelkov, D. A. (2021), "Modeling of damage to the mechanical properties of materials in the generalized gradient theory of elasticity", *Elasticity and Inelasticity (Proceedings of the International Scientific Symposium on the Mechanics of Deformable Bodies)*, Moscow State University, pp. 270–276.
49. Solyaev, Yu. O., Lurie, S. A. and Volkov, A. V. (2017), "Numerical solution of the pure bending problem of a beam within the framework of the dilatational theory of elasticity", *Computational Continuum Mechanics*, vol. 10, no 2, pp. 137–152. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.12.
50. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. (2023), "Scale-dependent electroelasticity model for a solid cylinder with a coating", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 25, no 4, pp. 29–40. DOI 10.46698/q5632-5654-3734-n.
51. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. (2023), "Gradient models of deformation of composite electroelastic bodies", *PNRPU Mechanics Bulletin,* no 5, pp. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01.
52. Aptukov, V. N., Skryabina, N. E. and Fruchart, D. (2025), "Analysis of elastic deformations induced by the hydride transformation in magnesium within the framework of the gradient theory of elasticity", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 19–28. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.02.
53. Lurie, S. A. and Solyaev, Yu. O. (2014), "A method for identifying the parameters of gradient models of heterogeneous structures using discrete-atomic modeling", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 89–112.
54. Lurie, S. A. and Solyaev, Yu. O. (2016), "Determination of the parameters of the gradient theory of elasticity using interatomic interaction potentials that take into account the modified Lorentz-Berthelot rule", *Physical Mesomechanics*, vol. 19 (3), pp. 39–46.
55. Vasiliev, V. V., Lurie, S. A. and Salov, V. A. (2018), "Study of the strength of cracked plates based on the maximum stress criterion in the scale-dependent generalized theory of elasticity", *Physical Mesomechanics*, vol. 21, no 4, pp. 5–12. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001.
56. Askes, H. and Susmel, L. (2015), "Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? ", *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 38, no 2, pp. 154–160. DOI: 10.1111/ffe.12183.

57. Lurie, S. A., Posypkin, M. A. and Solyaev, Yu. O. (2015), "A method for identifying scale parameters of the gradient theory of elasticity based on numerical experiments for flat composite structures", *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 3, no 6, pp. 1–5.
58. Korolenko, V. A. and Solyaev, Yu. O. (2021), "Estimation of stress concentration levels near micro-sized holes based on simplified models of gradient elasticity theory", *Proceedings of the Moscow Aviation Institute,* no 121, pp. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04.

Информация об авторах:
В. Н. Аптуков – доктор технических наук, профессор, начальник центра фундаментальной математики физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета, почетный работник высшего профессионального образования РФ (614068, Россия, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Author ID: (РИНЦ) 11997, ORCID: 0000-0001-8048-3804;
М. А. Барулина – доктор физико-математических наук, доцент, директор физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Author ID (РИНЦ): 174006, ORCID: 0000-0003-3867-648X.

Information about the authors:
V. N. Aptukov – Doctor of Science (Technical), Professor, Head of the Fundamental Mathematics Center at the Physics and Mathematics Institute of Perm State National Research University, Honorary Worker of Higher Professional Education (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 11997, ORCID: 0000-0001-8048-3804;
M. A. Barulina - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Director of the Physics and Mathematics Institute at Perm State National Research University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), Author ID: 174006, ORCID: 0000-0003-3867-648X.