

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 519.633

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101

<https://elibrary.ru/exvlyj>**Высокоточная компактная локально-одномерная  
консервативная сплайн-схема для двумерного уравнения  
диффузии в квазилинейной постановке****Алексей Юрьевич Рахманов<sup>1</sup>, Сергей Владимирович Русаков<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия<sup>1</sup>[alx.rakhmanov@gmail.com](mailto:alx.rakhmanov@gmail.com)<sup>2</sup>[rusakov@psu.ru](mailto:rusakov@psu.ru)

**Аннотация.** Представлен численный метод решения смешанной начально-краевой задачи для двумерного уравнения диффузии в случае квазилинейного коэффициента диффузии, при наличии линейного источника, обеспечивающий четвертый порядок пространственной аппроксимации. Рассматривается алгоритм построения операторов разностной схемы на компактном шаблоне с помощью последовательного покоординатного применения сплайн-интерполяции. Приведен теоретический расчет порядка аппроксимации, обеспечивающего рассматриваемой разностной схемой, а также найдено условие, при котором схема устойчива. Представлены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих теоретически найденное значение для порядка аппроксимации.

**Ключевые слова:** численные методы; вычислительная математика; сплайн; сплайн-интерполяция; двумерное параболическое дифференциальное уравнение; кубический сплайн; разностная схема; компактный шаблон разностной схемы.

**Для цитирования:** Рахманов А. Ю., Русаков С. В. Высокоточная компактная локально-одномерная консервативная сплайн-схема для двумерного уравнения диффузии в квазилинейной постановке // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 80–101. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101. <https://elibrary.ru/exvlyj>.

*Статья поступила в редакцию 07.08.2025; одобрена после рецензирования 10.09.2025; принята к публикации 29.09.2025.*



© 2025 Рахманов А. Ю., Русаков С. В. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## COMPUTER SCIENCE

Research article

# A High-Precision Compact Locally One-Dimensional Conservative Spline Scheme for a Two-Dimensional Diffusion Equation in a Quasi-linear Formulation

Alexey Yu. Rakhmanov, Sergey V. Rusakov

<sup>1, 2</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1</sup>alx.rakhmanov@gmail.com

<sup>2</sup>rusakov@psu.ru

**Abstract.** This article presents a method of numerical integration of a mixed initial-boundary value problem for two-dimensional second-order parabolic quasilinear diffusion equation with quasilinear diffusion coefficient and linear external source, that provides a 4th order spatial approximation. We consider an algorithm for constructing the operators of a difference scheme on a compact template using sequential coordinate-wise application of spline interpolation. The theoretical calculation of the approximation order provided by the considered difference scheme is given, and the condition under which the scheme is stable is found. The results of computational experiments confirming the theoretically found value for the approximation order are presented.

**Keywords:** *numerical methods; computational mathematics; spline; spline interpolation; two-dimensional parabolic differential equation; cubic spline; finite difference scheme; FDM; compact finite difference.*

**For citation:** Rakhmanov, A. Yu. and Rusakov S. V. (2025), "A High-Precision Compact Locally One-Dimensional Conservative Spline Scheme for a Two-Dimensional Diffusion Equation in a Quasi-linear Formulation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 80–101, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101, <https://elibrary.ru/exv1vj>.

*The article was submitted 07.08.2025; approved after reviewing 10.09.2025; accepted for publication 29.09.2025.*

### Введение

С целью численного решения начально-краевых задач для многомерных параболических дифференциальных уравнений и их систем в рамках метода конечных разностей наиболее часто применяются методы построения аддитивных разностных схем. Среди таких схем выделяют: факторизованные схемы, разностный оператор, содержащий пространственные производные которых представим в виде произведения разностных операторов меньшей пространственной мерности; схемы расщепления по физическим процессам, при построении которых различные этапы построения схемы соответствуют различным по своей физической природе аспектам описываемого процесса, к которым, например, относится схема широко применяемого метода крупных частиц, разработанного О.М. Белоцерковским и его научной школой; схемы расщепления по пространственным переменным, при которых разностный оператор схемы строится с помощью разностных операторов по отдельным пространственным координатам, также известные как локально-одномерные схемы (Locally One-Dimensional, LOD) [1, 2].

Вопросу разработки эффективных аддитивных локально-одномерных схем, в том числе схем переменных направлений (Alternating Direction Implicit, ADI), посвящено большое количество как фундаментальных, так и современных работ [3–16]. С точки зрения получения схем повышенной точности представляют интерес локально-одномерные

схемы, реализующие сплайн-интерполяцию совместно с методом расщепления по координатам. Так, например, в работах [17, 18] на этапе построения одномерных разностных операторов при реализации схем расщепления применяются сплайн-интерполяции, обеспечивающие повышенный порядок аппроксимации. В работе [19] численное приближение для двумерной задачи строится с помощью двумерного сплайна, представляющего линейную комбинацию одномерных В-сплайнов по отдельным пространственным переменным.

При моделировании многих физико-химических процессов возникают зоны высоких градиентов, что приводит к необходимости использования сеток высокой детализации, либо применения неравномерных сеток [20–23]. В частности, при моделировании процесса, описанного в работе [24], зона высоких градиентов для искомой функции возникает вблизи одной из границ расчетной области. Применение компактных разностных схем повышенного порядка аппроксимации позволяет снизить требования к детализации сетки. Двумерный вариант постановки из работы [24] является модельной задачей для апробации численного метода, представленного в данной статье.

В данной работе представлен метод численного интегрирования смешанной начально-краевой задачи для двумерного дифференциального уравнения параболического типа с помощью компактной мультиоператорной [25] разностной схемы, обладающей четвертым порядком пространственной аппроксимации. Метод является модификацией представленного ранее метода [26] для двумерного случая с периодическими граничными условиями по оси  $y$ , и основывается на построении разностных операторов с помощью значений, полученных путем последовательного применения кубического интерполяционного сплайна по отдельным пространственным координатам. Разностная схема строится, исходя из законов сохранения, сформулированных для каждой ячейки сеточного шаблона, и относится к классу аддитивных схем переменных направлений. Построение локально-одномерных разностных операторов путем интерполяции с помощью кубического сплайна класса  $C^2$  [27, 28], который строится для первообразной от искомой функции рассматриваемого уравнения, позволяет сформулировать компактную разностную схему высокой пространственной точности, обладающую свойством консервативности, базовыми величинами которой вместо значений функции в точке являются ее интегральные средние на контрольных объемах разностной сетки.

## 1. Математическая постановка задачи и численный метод

Рассмотрим смешанную начально-краевую задачу для двумерного параболического дифференциального уравнения, соответствующего уравнению диффузии при наличии источника в области  $G_u = \{(x, y, t) : x_0 \leq x \leq x_L, y_0 \leq y \leq y_L, 0 \leq t \leq T\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (D(u) \nabla u) + K(x, y, t)u, D(u) > 0, K(x, y, t) \leq 0, u(x, y, 0) = u^0(x, y), \\ \frac{\partial u(x_0, y, t)}{\partial x} &= 0, D(u(x_L, y, t)) \frac{\partial u(x_L, y, t)}{\partial x} = -\alpha_1(t)u(x_L, y, t), x \in [x_0; x_L], \\ u(x, y_0, t) &= u(x, y_L, t), \frac{\partial u(x, y_0, t)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y_L, t)}{\partial y}, y \in [y_0; y_L]. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом,  $D(u)$  – монотонная функция при  $(x, y, t) \in G_u$  по условию задачи.

Основная идея численного метода заключается в первоначальном нахождении вспомогательных аппроксимаций с помощью одномерного интерполяционного сплайна, приближающего в среднем, путем последовательной интерполяции вдоль различных

пространственных координат. Далее с помощью найденных аппроксимаций вычисляются разностные операторы, действующие в пространстве сеточных функций с двумя пространственными переменными, необходимые для численного интегрирования задачи (1). Будем проводить построение конечно-разностной схемы на сетке

$$\Omega_{h_x, h_y, \tau} = \{t_k, 0 \leq k \leq K, t_0 = 0, t_K = T\} \times \omega_x \times \omega_y,$$

$$\text{где } \omega_x = \{x_i = ih_x, i = \overline{0, N_x}, h_x = \frac{x_L}{N_x}\}, \omega_y = \{y_j = jh_y, j = \overline{0, N_y}, h_y = \frac{y_L}{N_y}\}.$$

Проинтегрируем основное уравнение в (1) по контрольному объему  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  для  $i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}$ , получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i+1/2, j+1/2}}{\partial t} &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (D(u(x_{i+1}, y, t)) \frac{\partial u(x_{i+1}, y, t)}{\partial x} - D(u(x_i, y, t)) \frac{\partial u(x_i, y, t)}{\partial x}) dy + \\ &+ \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D(u(x, y_{j+1}, t)) \frac{\partial u(x, y_{j+1}, t)}{\partial y} - D(u(x, y_j, t)) \frac{\partial u(x, y_j, t)}{\partial y}) dx + \\ &+ \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} K(x, y, t) u(x, y, t) dx dy; u_{i,j} = u(x_i, y_j, t), i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для преобразования задачи (2) к конечно-разностной постановке определим следующие разностные операторы:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{(n)} &\cong \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dx dy + O(h_x^4 + h_y^4), \\ u_{i,j}^{(n)} &\cong u(x_i, y_j, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)} &\cong \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x_i, y, t_n) dy + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j}^{(n)} &\cong \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t_n) dx + O(h_y^4), \\ u_{i+0.5, j+0.5}^{(n)} &\cong u(x_i + 0.5h_x, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4), \\ J_{i,j}^{x,(n)} &\cong \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4), J_{i,j}^{y,(n)} \cong \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{J}_{i,j+\frac{1}{2}}^{x,(n)} &\cong \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, y, t_n)}{\partial x} dy + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{J}_{i+1/2, j}^{y,(n)} &\cong \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx + O(h_x^4 + h_y^4), \\ J_{i+0.5, j}^{y,(n)} &\cong \frac{\partial u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4), \\ J_{i,j+0.5}^{x,(n)} &\cong \frac{\partial u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4), \\ u_{i+0.5, j}^{(n)} &\cong u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4), \\ u_{i,j+0.5}^{(n)} &\cong u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4). \end{aligned} \quad (3)$$

В данном случае рассматриваются начальные условия, заданные для интегральных сред-  
НИХ  $u_{i+1/2, j+1/2}^{(n)}$ .

С помощью операторов (3) построим аппроксимации для слагаемых в правой части основного уравнения (2) с помощью формулы численного интегрирования Симпсона при  $t = t_n$ , и получим его конечно-разностный аналог (рис. 1):

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n+1)} - \tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}}{\tau} &= \frac{1}{6h_x} [(D(u_{i+1,j}^{(n)})J_{i+1,j}^{x,(n)} - D(u_{i,j}^{(n)})J_{i,j}^{x,(n)}) + \\
 &+ 4(D(u_{i+1,j+0.5}^{(n)})J_{i+1,j+0.5}^{x,(n)} - D(u_{i,j+0.5}^{(n)})J_{i,j+0.5}^{x,(n)}) + (D(u_{i+1,j+1}^{(n)})J_{i+1,j+1}^{x,(n)} \\
 &- D(u_{i,j+1}^{(n)})J_{i,j+1}^{x,(n)})] + \\
 &+ \frac{1}{6h_y} [(D(u_{i,j+1}^{(n)})J_{i,j+1}^{y,(n)} - D(u_{i,j}^{(n)})J_{i,j}^{y,(n)}) + \\
 &+ 4(D(u_{i+0.5,j+1}^{(n)})J_{i+0.5,j+1}^{y,(n)} - D(u_{i+0.5,j}^{(n)})J_{i+0.5,j}^{y,(n)}) + (D(u_{i+1,j+1}^{(n)})J_{i+1,j+1}^{y,(n)} \\
 &- D(u_{i+1,j}^{(n)})J_{i+1,j}^{y,(n)})] + \\
 &+ \frac{1}{36} [K(x_i, y_j, t_n)u_{i,j}^{(n)} + K(x_i, y_{j+1}, t_n)u_{i,j+1}^{(n)} + K(x_{i+1}, y_j, t_n)u_{i+1,j}^{(n)} \\
 &+ K(x_{i+1}, y_{j+1}, t_n)u_{i+1,j+1}^{(n)} \\
 &+ 4(K(x_i + \Delta x/2, y_j, t_n)u_{i+0.5,j}^{(n)} + K(x_i + \Delta x/2, y_{j+1}, t_n)u_{i+0.5,j+1}^{(n)} + \\
 &+ K(x_i, y_j + \Delta y/2, t_n)u_{i,j+0.5}^{(n)} + K(x_{i+1}, y_j + \Delta y/2, t_n)u_{i+1,j+0.5}^{(n)}) \\
 &+ 16K(x_i + \Delta x/2, y_j + \Delta y/2, t_n)u_{i+0.5,j+0.5}^{(n)}]; \\
 \tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(0)} &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, 0) dy dx, \\
 J_{0,j}^{x,(n)} &= 0, D(u_{N_x,j}^{(n)})J_{N_x,j}^{x,(n)} = -\alpha_1(t)u_{N_x,j}^{(n)}, \\
 \tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)} &= \tilde{u}_{i+1/2,N_y+1/2}^{(n)}, \tilde{u}_{i+1/2,0}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}, \tilde{J}_{i+1/2,0}^{y,(n)} = \tilde{J}_{i+1/2,N_y}^{y,(n)}, u_{i,1/2}^{(n)} \\
 &= u_{i,N_y+1/2}^{(n)}, u_{i,0}^{(n)} = u_{i,N_y}^{(n)}, J_{i,0}^{y,(n)} = J_{i,N_y}^{y,(n)}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

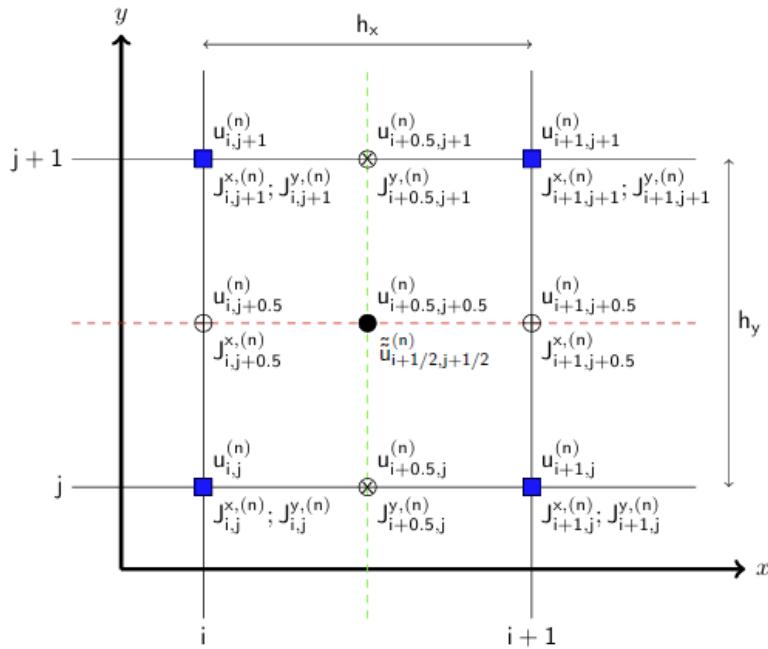


Рис. 1. Аппроксимаций значений функции  $u(x, y, t)$  и ее частных пространственных производных целых и полуцелых узлах расчетной сетки для временного шага  $t = t_n$

Опишем алгоритм получения значений разностных операторов (3), необходимых для разностной схемы (4).

Для последовательной интерполяции вдоль пространственных координат будем использовать сплайн  $S_{3,1}$  класса  $C^2$ , характеристики которого представлены в работах [27, 28].

Рассмотрим  $S_{3,1}$  как интерполирующий сплайн для функции  $W(x, y, t)$ , являющейся первообразной для функции  $w(x, y, t)$  по пространственной координате, по которой осуществляется интерполяция:

$$\begin{aligned} S_{3,1}(W(v); v) = & (1-\tau)^2(1+2\tau)W_i + \tau^2(3-2\tau)W_{i+1} + \\ & + h_i\tau(1-\tau)[(1-\tau)w_i - \tau w_{i+1}], \tau = \frac{v-v_i}{h_i}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $W'(y) = w(y)$ .

Из условия получим  $S_{3,1}''(W, v_i - 0) = S_{3,1}''(W, v_i + 0)$  [27] СЛАУ:

$$w_{j-1} + 4w_j + w_{j+1} = 3(\tilde{w}_{j-1/2} + \tilde{w}_{j+1/2}), j = \overline{1, N_y - 1}, \tilde{w}_{j+1/2} = \frac{1}{h_y} \int_{v_j}^{v_{j+1}} w(v) dv. \quad (6)$$

Для  $\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy dx$  как функции от переменной  $y$  на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, N_x - 1}$  построим интерполяционный сплайн (5) вида  $S_{3,1}(\int(\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y, t_n) dx) dy, y)$ , действующий вдоль координаты  $x$ . Построим СЛАУ типа

(5) для значений  $u_{i+1/2,j}^{(n)}$  и  $u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}$  во внутренних узлах, дополнив ее условиями периодичности по координате  $y$  по пространству в граничных точках, получив таким образом совместную СЛАУ:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i+1/2,0}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}, \tilde{u}_{i+1/2,1}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y+1}^{(n)}, \tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y+1/2}^{(n)}, \\ \tilde{u}_{i+1/2,j-1}^{(n)} + 4\tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,j+1}^{(n)} = 3(\tilde{u}_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}). \end{cases} \quad (7)$$

Используя представление функций  $\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y, t_n) dx$ ,  $\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy dx$  в виде

ряда Тейлора по переменной  $y$  в окрестности точки  $y_j$ , а также применив метод неопределенных коэффициентов, построим компактные центральные разностные операторы  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$ , обеспечивающие четвертый порядок пространственной аппроксимации по переменной  $y$  [26] с учетом периодических граничных условий:

$$J_{i+1/2,j}^{y,(n)} = (0.5u_{i+1/2,j-1}^{(n)} - 0.5u_{i+1/2,j+1}^{(n)} - 2u_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} + 2u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}) / h_y, j = \overline{1, N_y - 1}. \quad (8)$$

Таким образом, были найдены аппроксимации  $u_{i+1/2,j}^{(n)}$ ,  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$  для отрезков  $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, N_x - 1}$  (рис. 2а).

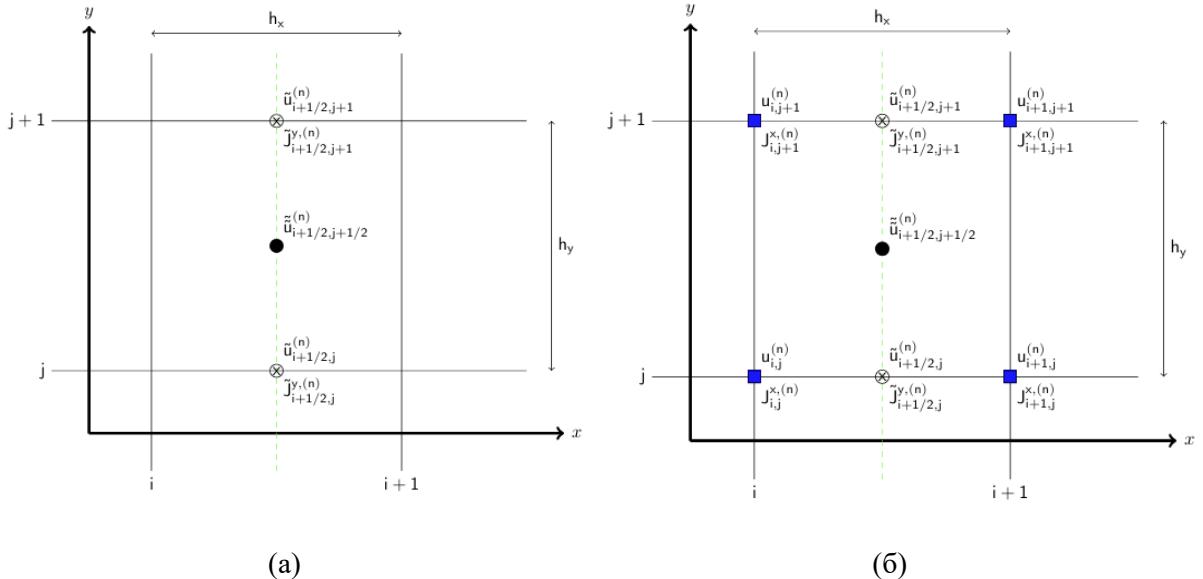
Далее необходимо определить значения  $u_{i,j}^{(n)}$ ,  $J_{i,j}^{x,(n)}$  путем интерполяции с помощью сплайна (5) вдоль координаты  $x$  на основе полученных значений  $u_{i+1/2,j}^{(n)}$  с учетом граничных условий, действующих при  $x = x_0, x = x_L$ . Используя представление функций  $\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y, t_n) dx$ ,  $u(x, y, t_n)$  в виде ряда Тейлора по переменной  $x$  в окрестности  $x_i$ , а также применив метод неопределенных коэффициентов, построим операторы  $J_{i,j}^{x,(n)}$ :

$$\begin{aligned} J_{0,j}^{x,(n)} &= (-6u_{0,j}^{(n)} - 8u_{1,j}^{(n)} - u_{2,j}^{(n)} + 11.5\tilde{u}_{1/2,j}^{(n)} + 3.5\tilde{u}_{3/2,j}^{(n)})/h_x \\ J_{i,j}^{x,(n)} &= (0.5u_{i-1,j}^{(n)} - 0.5u_{i+1,j}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)})/h_x, i = \overline{1, N_x - 1} \\ J_{N_x,j}^{x,(n)} &= (6u_{N_x,j}^{(n)} + 8u_{N_x-1,j}^{(n)} + u_{N_x-2,j}^{(n)} - 11.5\tilde{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} - 3.5\tilde{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)})/h_x. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом граничных условий, применив интерполяционный сплайн (5) вида  $S_{3,1}(\int u(x, y_j, t_n) dx, x)$  вдоль координаты  $x$  по всем  $\{y_j\}: j = \overline{0, N_y}$ , определим СЛАУ для нахождения аппроксимаций  $u_{i,j}^{(n)} \simeq u(x_i, y_j, t) + O(h_y^4 + h_x^4)$ , из которых далее могут быть найдены  $J_{i,j}^{x,(n)} \simeq \frac{\partial u(x_i, y_j, t)}{\partial x} + O(h_y^4 + h_x^4)$ :

$$\begin{aligned} 5u_{0,j}^{(n)} + 4u_{1,j}^{(n)} &= 8.5\tilde{u}_{1/2,j}^{(n)} + 0.5\tilde{u}_{3/2,j}^{(n)} \\ u_{i-1,j}^{(n)} + 4u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} &= 3(\tilde{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)}), i = \overline{1, N_x - 1} \\ 4u_{N_x-1,j}^{(n)} + \left(5 + \frac{h_x \alpha_1(t)}{D(u_{N_x,j}^{(n)})}\right) u_{N_x,j}^{(n)} &= 8.5\tilde{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} + 0.5\tilde{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Операторы  $J_{i,j}^{x,(n)}$  могут быть найдены из полученных  $u_{i,j}^{(n)}$  с помощью (9) (рис. 2б).



**Рис. 2.** Нахождение точечных и интегральных разностных операторов с помощью применения интерполирующего сплайна по отдельным координатам (1, 2 шаги): (а) – по координате  $y$ , (б) – по координате  $x$

Для восстановления аппроксимаций  $u_{i,j+1/2}^{(n)} \equiv \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x_i, y, t_n) dy + O(h_x^4 + h_y^4)$  по найденным  $u_{i,j}^{(n)} \simeq u(x_i, y_j, t) + O(h_y^4 + h_x^4)$  применим следующие формулы с учетом периодичности:

$$u_{i,j+1/2}^{(n)} = -\frac{1}{24} u_{i,(j-1+N_y)\%N_y}^{(n)} + \frac{13}{24} u_{i,j\%N_y}^{(n)} + \frac{13}{24} u_{i,(j+1)\%N_y}^{(n)} - \frac{1}{24} u_{i,(j+2)\%N_y}^{(n)}. \quad (11)$$

Используя представление функций  $u(x, y, t_n)$ ,  $\frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy$  в виде ряда Тейлора по переменной  $y$  в окрестности точки  $y_j$ , а также применив метод неопределенных коэффициентов, найдем с учетом периодических граничных условий операторы  $J_{i,j}^{y,(n)} \equiv \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4)$  (рис. 3а):

$$J_{i,j}^{y,(n)} = \frac{0.5u_{i,j-1}^{(n)} - 0.5u_{i,j+1}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i,j-1/2}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i,j+1/2}^{(n)}}{h_y}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}. \quad (12)$$

Для восстановления аппроксимаций  $\tilde{J}_{i,j+1/2}^{x,(n)} \equiv \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, y, t_n)}{\partial x} dy + O(h_x^4 + h_y^4)$  по найденным значениям  $J_{i,j}^{x,(n)} \equiv \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4)$  применим следующие формулы с учетом периодичности:

$$J_{i,j+1/2}^{x,(n)} = -\frac{1}{24} J_{i,(j-1+N_y)\%N_y}^{x,(n)} + \frac{13}{24} J_{i,j\%N_y}^{x,(n)} + \frac{13}{24} J_{i,(j+1)\%N_y}^{x,(n)} - \frac{1}{24} J_{i,(j+2)\%N_y}^{x,(n)}. \quad (13)$$

В результате были получены необходимые точечные и интегральные разностные операторы из (3). Для контрольных объемов  $\{[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]: i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}\}$  при  $t = t_n$  найдем с помощью формулы численного интегрирования Симпсона, обеспечивающей четвертый порядок точности по пространству, аппроксимации значений функций  $u(x, y, t)$   $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}$   $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$  в полуцелых узлах:

$$\begin{aligned} u_{i+0.5,j}^{(n)} &= 1.5\tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)} - 0.25(u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)}), u_{i+0.5,j}^{(n)} \\ &= u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4) \\ u_{i,j+0.5}^{(n)} &= 1.5\tilde{u}_{i,j+1/2}^{(n)} - 0.25(u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)}), u_{i,j+0.5}^{(n)} \\ &= u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4) \\ u_{i+0.5,j+0.5}^{(n)} &= (36\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)} - (u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i+1,j+1}^{(n)}) - \\ &\quad - 4(u_{i+0.5,j}^{(n)} + u_{i+0.5,j+1}^{(n)} + u_{i,j+0.5}^{(n)} + u_{i+1,j+0.5}^{(n)}))/16, u_{i+0.5,j+0.5}^{(n)} = \\ &= u(x_i + 0.5h_x, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4) \\ J_{i+0.5,j}^{y,(n)} &= 1.5\tilde{J}_{i+1/2,j}^{y,(n)} - 0.25(J_{i,j}^{y,(n)} + J_{i+1,j}^{y,(n)}), J_{i+0.5,j}^{y,(n)} \\ &= \frac{\partial u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4) \\ J_{i,j+0.5}^{x,(n)} &= 1.5\tilde{J}_{i,j+1/2}^{x,(n)} - 0.25(J_{i,j}^{x,(n)} + J_{i,j+1}^{x,(n)}), J_{i,j+0.5}^{x,(n)} = \frac{\partial u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4) \end{aligned} \quad (14)$$

Построенная разностная схема (4) формально обеспечивает четвертый порядок пространственной аппроксимации при условии монотонности функции  $D(u)$ .

## 2. Порядок пространственной аппроксимации

Исследуем структуру пространственной погрешности, возникающей в результате применения разностных операторов (3), полученных путем последовательного применения сплайна (5) по одной из пространственных координат, в схеме (4).

Рассмотрим основную СЛАУ (7) для восстановления  $u_{i+1/2}^{(n)}$  по значениям  $u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}$  с учетом периодических граничных условий с помощью применения сплайна (5) по переменной  $y$ , а также разложения правой части в ряд Тейлора, получим СЛАУ для невязок  $e_{i+1/2,j}^{(n)} = u_{i+1/2}^{(n)} - \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t) dx$ , далее везде подразумевая вычисления для временного

слоя  $t_n$ :

$$\begin{cases} \frac{4e_{i+1/2,1}^{(n)} + e_{i+1/2,2}^{(n)} + e_{i+1/2,N_y}^{(n)}}{h_y} = 3(\tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,3/2}^{(n)}) - 4\tilde{u}_{i+1/2,1}^{(n)} - \tilde{u}_{i+1/2,2}^{(n)} - \tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}, \\ e_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(n)} + 4e_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} + e_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(n)} = 3(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{(n)} + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(n)}) - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(n)} - 4\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(n)}, \\ 0 < j < N_y, \\ e_{i+1/2,1}^{(n)} + e_{i+1/2,N_y-1}^{(n)} + 4e_{i+1/2,N_y}^{(n)} = 3(\tilde{u}_{i+1/2,N_y-1/2}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)}) - \tilde{u}_{i+1/2,1}^{(n)} - \tilde{u}_{i+1/2,N_y-1}^{(n)} - 4\tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t) dy dx$ .

Представим выражения в правых частях уравнений СЛАУ (6) в виде рядов Тейлора, поскольку они содержат только точные интегральные средние и точечные значения, после чего запишем СЛАУ (7) в матричной форме:

$$\hat{A}e_{i+1/2}^{(n)} = w_{i+1/2}^{(n)}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e_{i+1/2}^{(n)} = (e_{i+1/2,0}^{(n)}, \dots, e_{i+1/2,N_y}^{(n)})^T \\ w_{i+1/2}^{(n)} = (w_{i+1/2,0}^{(n)}, \dots, w_{i+1/2,N_y}^{(n)})^T \end{matrix}. \quad (16)$$

Опишем вектор в правой части СЛАУ с помощью представление в виде ряда:

$$\begin{aligned} w_{i+1/2}^{(n)} = -h_y^4 & \left( \frac{1}{30} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j, t)}{\partial y^4} - \frac{h_x}{60} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t)}{\partial x \partial y^4} - \frac{h_x^2}{180} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j, t)}{\partial x^2 \partial y^4} - \right. \\ & \left. - \frac{h_x^3}{720} \frac{\partial^7 u(x_i, y_j, t)}{\partial x^3 \partial y^4} - \frac{h_x^4}{3600} \frac{\partial^8 u(x_i, y_j, t)}{\partial x^4 \partial y^4} + O(h_x^5) \right) + O(h_y^6) \end{aligned} \quad (17)$$

Построим выражение для невязок  $e_{i+1/2}^{(n)} = \hat{A}^{-1} w_{i+1/2}^{(n)}$ , и  $e_{i+1/2,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{N_y} (\hat{A}^{-1})_{jk} w_{i+1/2,k}^{(n)}$ .

Здесь индекс  $i+1/2$  соответствует вертикальной колонке расчетной сетки, состоящей из узлов, для которых  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $k$  соответствует номеру строки в матрице  $\hat{A}^{-1}$ .

Численное исследование матрицы  $\hat{A}^{-1}$  показывает, что абсолютные значения элементов обратной матрицы экспоненциально убывают при удалении от главной диагонали (рис. 4).

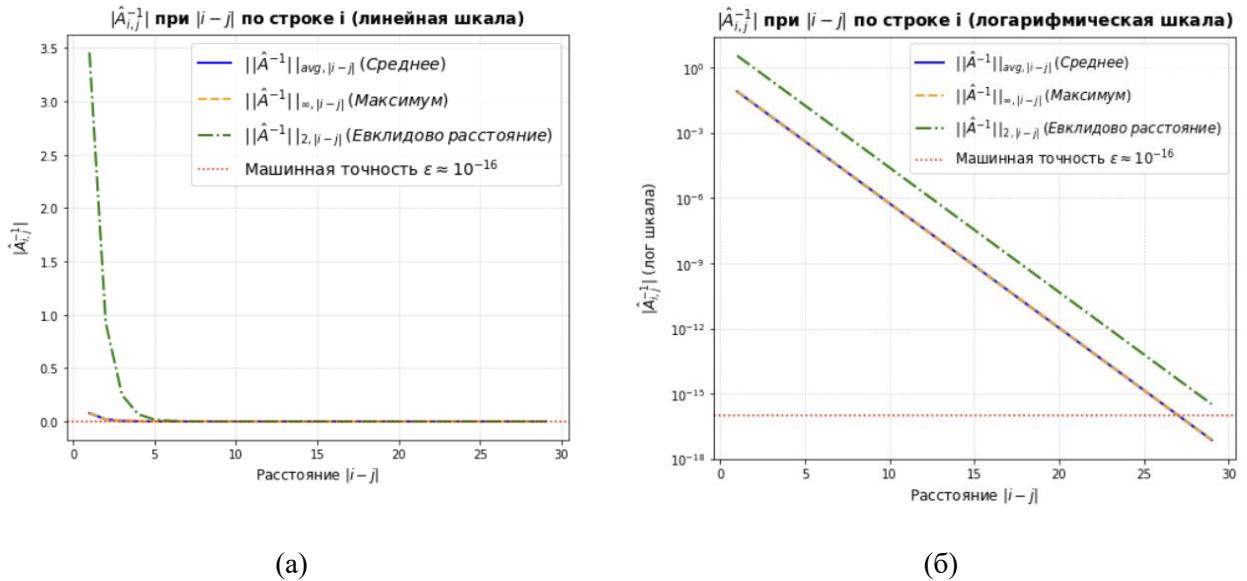


Рис. 4. Зависимость норм  $\left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right|$  от  $|i - j|$ : (а) – линейная шкала, (б) – лог. шкала

График максимального значения по всем строкам для радиуса от главной диагонали, внутри которого абсолютное значение элементов матрицы  $\hat{A}^{-1}$  превышает машинную погрешность, представлен на рис. 5.

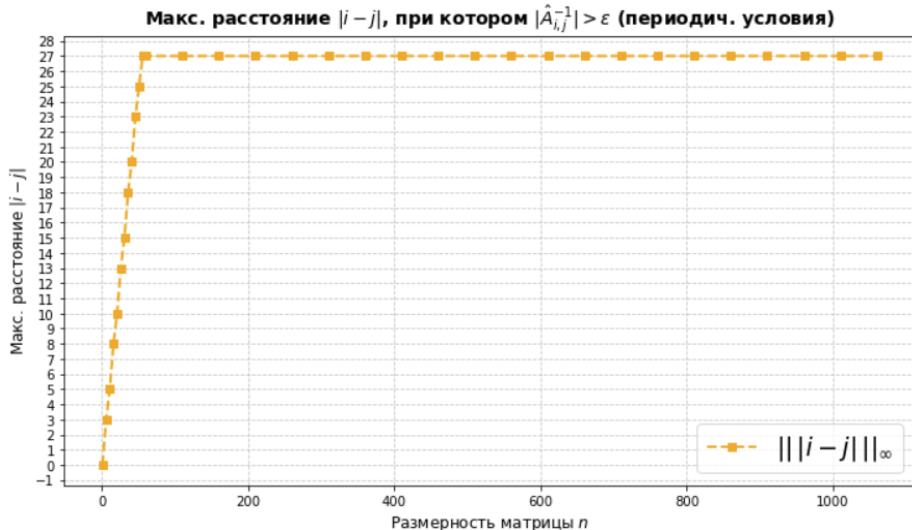


Рис. 5. Зависимость  $\max_i \{|i - j| : \left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right| > \varepsilon\}$  от  $N_y$

Таким образом, для  $N_y \leq 27$  имеем  $\max_i \{|i - j| : \left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right| > \varepsilon\} = N_y$ , при  $N_y > 27$   $\max_i \{|i - j| : \left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right| > \varepsilon\} = 27$ . Тогда при  $n \gg 27$  является справедливой следующая оценка:

$$e_{i+1/2,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{N_y} (\hat{A}^{-1})_{jk} w_{i+1/2,k}^{(n)} \sim O(w_{i+1/2,k}^{(n)}) j = 0, 1, \dots, N_y. \quad (18)$$

Таким образом, оценка для вычисленных  $u_{i+1/2,j}$ :

$$\hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)} = \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t) dx + e_{i+1/2,j}^{(n)}. \quad (19)$$

Найдем погрешность аппроксимации при вычислении операторов  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$  (8) по найденным  $u_i, i = 0, 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} J_{i+1/2,j}^{y,(n)} - \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx &= \\ &= (0.5\tilde{u}_{i+1/2,j-1}^{(n)} - 0.5\tilde{u}_{i+1/2,j+1}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)})/h_y - \\ &- \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx = \\ &= (0.5(\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_{j-1}, t_n) dx + e_{i+1/2,j-1}^{(n)}) - 0.5(\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_{j+1}, t_n) dx \\ &\quad + e_{i+1/2,j+1}^{(n)}) - \\ &- 2\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} u(x, y, t_n) dy dx + 2\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy dx)/h_y \\ &\quad - \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx = \\ &= \frac{0.5e_{i+1/2,j-1}^{(n)} - 0.5e_{i+1/2,j+1}^{(n)}}{h} + u'(x_i) - h_y^4 (\frac{1}{360} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y^5} \\ &\quad + \frac{h_x}{720} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x \partial y^5} + \\ &\quad + \frac{h_x^2}{2160} \frac{\partial^7 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^2 \partial y^5} + \frac{h_x^3}{8640} \frac{\partial^8 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^3 \partial y^5} + \frac{h_x^4}{43200} \frac{\partial^9 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^4 \partial y^5} + O(h_x^5)) \\ &\quad + O(h_y^6) = \\ &= (-\frac{\partial e_{i+1/2,j}^{(n)}}{\partial y} - \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^2 e_{i+1/2,j}^{(n)}}{\partial y^2} + O(h_y^4)) + O(h_y^4) \sim O(h_y^4) \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим основную СЛАУ для восстановления  $u_{i,j}^{(n)}$  по вычисленным значениям

$$\hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)} = \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t) dx + e_{i+1/2,j}^{(n)} \quad (26)$$

$$\begin{cases} 6u_{0,j}^{(n)} + 8u_{1,j}^{(n)} + u_{2,j}^{(n)} = 11.5\hat{u}_{1/2,j}^{(n)} + 3.5\hat{u}_{3/2,j}^{(n)} - h_x u'_x(x_0, y_j, t), \\ u_{i-1,j}^{(n)} + 4u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} = 3(\hat{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + \hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)}), i = 1, \dots, N_x - 1, \\ u_{N_x-2,j}^{(n)} + 8u_{N_x-1,j}^{(n)} + 6u_{N_x,j}^{(n)} = 3.5\hat{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)} + 11.5\hat{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} + h_x u'_x(x_{N_x}, y_j, t). \end{cases} \quad (21)$$

Выполнив линейные преобразования для перехода к системе (10), получим с помощью разложения правой части (21) в ряд Тейлора СЛАУ для невязок  $e_{i,j}^{yx} = u_{i,j}^{(n)} - u(x_i, y_j, t)$ :

$$\begin{cases} 5e_{0,j}^{yx} + 4e_{1,j}^{yx} = 8.5\hat{u}_{1/2,j}^{(n)} + 0.5\hat{u}_{3/2,j}^{(n)} - h_x u_x'(x_0, y_j, t) - 5u(x_0, y_j, t) - 4u(x_1, y_j, t), \\ e_{i-1,j}^{yx} + 4e_{i,j}^{yx} + e_{i+1,j}^{yx} = 3(\hat{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + \hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)}) - u(x_{i-1}, y_j, t) - 4u(x_i, y_j, t) - u(x_{i+1}, y_j, t), i = \overline{1, N_x - 1}, \\ 4e_{N_x-1,j}^{yx} + 5e_{N_x,j}^{yx} = 0.5\hat{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)} + 8.5\hat{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} + h_x u_x'(x_{N_x}, y_j, t) - 4u(x_{N_x-1}, y_j, t) - 5u(x_{N_x}, y_j, t). \end{cases} \quad (22)$$

Представим (22) в матричном виде, раскладывая аналитические компоненты в правой части в ряды Тейлора:

$$A e_j^{yx(n)} = w_j^{yx(n)}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_j^{yx(n)} &= (e_{j,0}^{yx(n)}, \dots, e_{j,N_x}^{yx(n)})^T \\ w_j^{yx(n)} &= (w_{j,0}^{yx(n)}, \dots, w_{j,N_x}^{yx(n)})^T \\ e_j^{yx(n)} &= A^{-1} w_j^{yx(n)}; \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда получим для  $i$ -го элемента:  $e_{j,i}^{yx(n)} = \sum_{k=0}^{N_x} (A^{-1})_{ik} w_{j,k}^{yx(n)}$ .

Представим компоненты вектора  $w_j^{yx(n)}$  в виде рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} w_{j,0}^{yx(n)} &= 8.5e_{1/2,j}^{(n)} + 0.5e_{3/2,j}^{(n)} + \frac{h_x^4}{30} \frac{\partial^4 u(x_0, y_j, t_n)}{\partial x^4} + \frac{h_x^5}{45} \frac{\partial^5 u(x_0, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) \\ w_{j,i}^{yx(n)} &= 3(e_{i-1/2,j}^{(n)} + 0.5e_{i+1/2,j}^{(n)}) - \frac{h_x^4}{30} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^4} - \frac{h_x^6}{630} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^6} + O(h_x^8) \\ w_{j,N_x}^{yx(n)} &= 0.5e_{N_x-3/2,j}^{(n)} + 8.5e_{N_x-1/2,j}^{(n)} + \frac{h_x^4}{30} \frac{\partial^4 u(x_{N_x}, y_j, t_n)}{\partial x^4} - \frac{h_x^5}{45} \frac{\partial^5 u(x_{N_x}, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) \end{aligned} \quad (24)$$

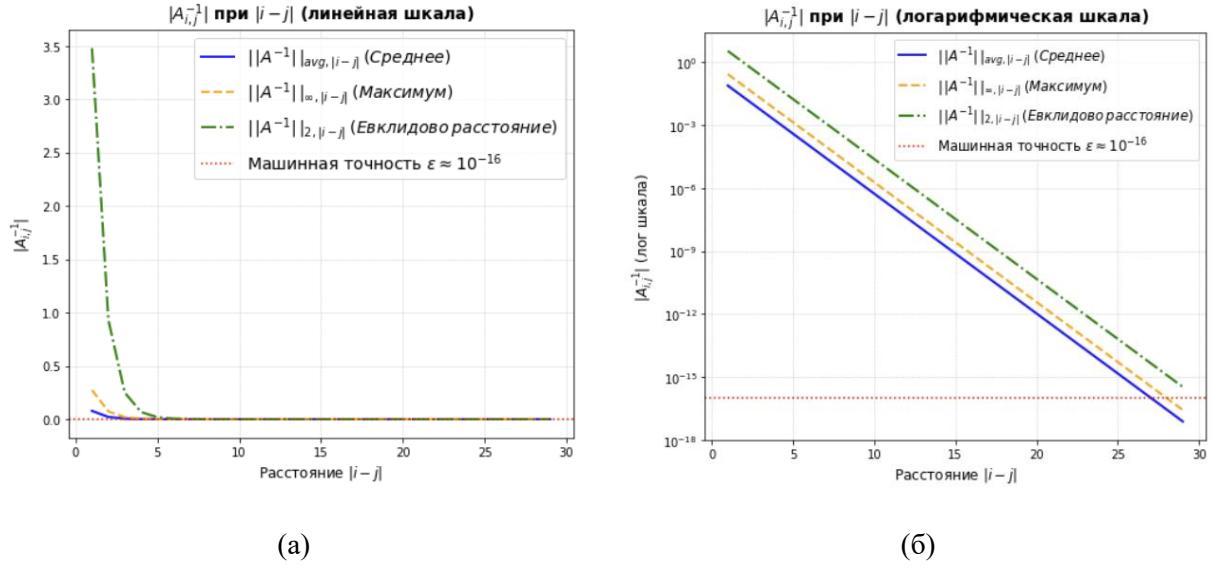
Матрица  $A$  является трехдиагональной (с диагональным преобладанием), ограниченной, квазицентричной матрицей,  $A^{-1}$  существует и также ограничена, тогда, в соответствии с теоремой 2.4 из работы [29], справедлива оценка:

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{ij} &\leq C_1 \lambda_1^{|i-j|}, \quad \lambda_1 = \left( \frac{\text{cond}(A)-1}{\text{cond}(A)+1} \right)^{1/m}, \quad \text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \\ C_1 &= (m+1) \lambda_1^{-m} \|A^{-1}\| \text{cond}(A) \max \left\{ 1, \left[ \frac{1+\text{cond}(A)}{\text{cond}(A)} \right]^2 / 2 \right\}, m = 2. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку  $0 < \lambda_1 < 1$ , то для каждой строки  $i$  матрицы  $A^{-1}$  число элементов, модуль которых превышает наперед заданное число  $\varepsilon$ , ограничено:

$$\{j : |(A^{-1})_{ij}| > \varepsilon\} \leq \min(n, 2r+1), r = \text{const}, r = r(\text{cond}(A)), r \neq r(n). \quad (26)$$

Численное исследование элементов матрицы  $A^{-1}$  также показывает экспоненциальное убывание их абсолютных значений при удалении от главной диагонали (рис. 6).



**Рис. 6.** Зависимость норм  $\left| (A^{-1})_{ij} \right|$  от  $|i-j|$ : (а) – линейная шкала, (б) – лог. шкала

Максимальный радиус  $\max_i \{ |i-j| : \left| (A^{-1})_{ij} \right| > \varepsilon \}$  соответствует значению, найденному для матрицы  $\hat{A}^{-1}$ . Тогда при  $n \gg 27$  является справедливой следующая оценка:

$$e_{j,i}^{yx(n)} = \sum_{k=0}^{N_x} (A^{-1})_{ik} w_{j,k}^{yx(n)} \sim O(w_{j,k}^{yx(n)}), i = 0, 1, \dots, N_x. \quad (27)$$

Тогда оценка для вычисленных  $u_{i,j}$ :

$$\hat{u}_{i,j}^{(n)} = u(x_i, y_j, t) + e_{j,i}^{yx(n)}. \quad (28)$$

Найдем погрешность при вычислении операторов (9),  $i = 1, \dots, N_x - 1$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j,i}^x - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= (0.5\hat{u}_{i-1,j}^{(n)} - 0.5\hat{u}_{i+1,j}^{(n)} - 2\hat{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + 2\hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)})/h - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \\ &= \frac{0.5(e_{j,i-1}^{yx(n)} - e_{j,i+1}^{yx(n)}) + 2(e_{i+1/2,j}^{y(n)} - e_{i-1/2,j}^{y(n)})}{h_x} - \frac{h_x^4}{360} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) = \\ &= O\left(\frac{\partial e_{j,i}^{yx(n)}}{\partial x}\right) + O\left(\frac{\partial e_{i+1/2,j}^{y(n)}}{\partial x}\right) - \frac{h_x^4}{360} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) \sim O(h_x^4 + h_y^4). \end{aligned} \quad (29)$$

Применяя разложение функций в ряд Тейлора в окрестностях соответствующих узлов, видно, что формулы (11), (13) при их применении к точным значениям соответственно  $u(x_i, y_j, t_n)$  и  $\dot{u}_x(x_i, y_j, t_n)$  обеспечивают четвертый порядок аппроксимации по  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{24}u(x_i, y_{(j-1+N_y)\%N_y}, t_n) + \frac{13}{24}u(x_i, y_{j\%N_y}, t_n) + \frac{13}{24}u(x_i, y_{(j+1)\%N_y}, t_n) - \\ - \frac{1}{24}u(x_i, y_{(j+2)\%N_y}, t_n) = \frac{1}{h_x} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x_i, y, t_n) dy - \frac{11}{720}h_y^4 \frac{\partial^4 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y^4} + O(h_y^5) \end{aligned} ; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{(j-1+N_y)\%N_y}, t_n)}{\partial x} + \frac{13}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{j\%N_y}, t_n)}{\partial x} + \frac{13}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{(j+1)\%N_y}, t_n)}{\partial x} - \\ - \frac{1}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{(j+2)\%N_y}, t_n)}{\partial x} = \frac{1}{h_x} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, y, t_n)}{\partial x} dy - \frac{11}{720}h_y^4 \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x \partial y^4} + O(h_y^5) . \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом (27), (30) оценка погрешности при вычислении операторов (12),  $j=1, \dots, N_y - 1$  имеет вид:

$$J_{i,j}^{y,(n)} - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{0.5u_{i,j-1}^{(n)} - 0.5u_{i,j+1}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i,j-1/2}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i,j+1/2}^{(n)}}{h_y} - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} \sim O(h_x^4 + h_y^4). \quad (32)$$

Выражения (14) сохраняют общий порядок аппроксимации  $\sim O(h_x^4 + h_y^4)$  как линейные комбинации величин, имеющих погрешность порядка не выше  $\sim O(h_x^4 + h_y^4)$ , с постоянными коэффициентами.

### 3. Устойчивость разностной схемы

Исследуем устойчивость представленной разностной схемы по начальным данным при помощи спектрального признака Неймана.

Представим значения  $u_{j+1/2, k+1/2}^{(n+1)}, u_{j, k+1/2}^{(n)}, u_{j+1/2, k}^{(n)}$  в виде гармоник:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2, k+1/2}^{(n)} &= \lambda^n e^{i(\alpha(j+\frac{1}{2}) + \beta(k+\frac{1}{2}))}, \\ u_{j+1/2, k}^{(n)} &= \lambda^n Q(\beta) e^{i(\alpha(j+\frac{1}{2}) + \beta k)}, \\ u_{j, k+1/2}^{(n)} &= Q(\beta) Q(\alpha) e^{i(\alpha j + \beta k)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда из СЛАУ (7), (10) получим:

$$\begin{aligned} Q(\beta)(e^{-i\beta} + 4 + e^{i\beta}) &= 3(e^{-i0.5\beta} + e^{i0.5\beta}), \\ Q(\alpha)(e^{-i\alpha} + 4 + e^{i\alpha}) &= 3(e^{-i0.5\alpha} + e^{i0.5\alpha}) \end{aligned} \quad (34)$$

Откуда найдем значения для  $Q(\alpha), Q(\beta)$ :

$$Q(\alpha) = \frac{3 \cos(\alpha/2)}{2 + \cos \alpha}, Q(\beta) = \frac{3 \cos(\beta/2)}{2 + \cos \beta}. \quad (35)$$

С учетом СЛАУ (10), выражений (35) определим представление для  $u_{i,j}^{(n)}$ :

$$u_{j,k}^{(n)} = \lambda^n \frac{3 \cos(\alpha/2)}{2 + \cos \alpha} \frac{3 \cos(\beta/2)}{2 + \cos \beta} e^{i(\alpha j + \beta k)}. \quad (36)$$

Найдем представления в виде гармоник для остальных аппроксимаций, которые используются в (4). Из (11) получим представление для  $u_{i,j+1/2}^{(n)}$ :

$$u_{j,k+1/2}^{(n)} = -\frac{3\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\beta+2\alpha j+2\beta k)} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) (-7 + \cos \beta)}{2(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}. \quad (37)$$

Из выражений (8–9), (12–13) получим представления соответственно для  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$ ,  $J_{i,j}^{x,(n)}$ ,  $J_{i,j}^{y,(n)}$ ,  $J_{i,j+1/2}^{x,(n)}$ :

$$\begin{aligned} J_{i+1/2,j}^{y,(n)} &= \frac{\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\alpha+2\alpha j+\beta(-3+2k))} (-1 - 9e^{i\beta} + 9e^{2i\beta} + 1e^{3i\beta})}{4h_y(2 + \cos \beta)}, \\ J_{i,j}^{x,(n)} &= \frac{\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\alpha(-3+2j)+2\beta k)} (-3 - 27e^{i\alpha} + 27e^{2i\alpha} + 3e^{3i\alpha}) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{4h_x(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \\ J_{i,j}^{y,(n)} &= -\frac{3i\lambda^n e^{i\alpha j} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) (-4 + \cos \beta) \sin \beta (\cos(\beta k) + i \sin(\beta k))}{h_y(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} J_{i,j+1/2}^{x,(n)} &= \frac{117i\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\beta+2\alpha j+2\beta k)}}{16h_x(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)} \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{26} \sin \frac{\alpha - 4\beta}{2} + \right. \\ &\quad + \frac{6}{13} \sin \frac{\alpha - 2\beta}{2} - \frac{1}{234} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} - 2\beta \right) + \frac{2}{39} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} - \beta \right) + \frac{6}{13} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right) + \\ &\quad \left. + \frac{2}{39} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} + \beta \right) - \frac{1}{234} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} + 2\beta \right) - \frac{1}{26} \sin \frac{\alpha + 4\beta}{2} \right); \end{aligned}$$

Из (14) получим представления в виде гармоник для аппроксимаций значений функции  $u(x, y, t)$  в полуцелых узлах:

$$\begin{aligned} u_{j+0.5,k}^{(n)} &= \frac{e^{\frac{i}{2}(\alpha(-1+2j)+2\beta k)} \left( \frac{9}{8} + \frac{27}{4} e^{i\alpha} + \frac{9}{8} e^{2i\alpha} \right) \lambda^n \cos \frac{\beta}{2}}{(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \\ u_{j,k+0.5}^{(n)} &= \frac{e^{i\alpha j} \left( -\frac{9}{16} e^{i\beta(-1+k)} + \frac{81}{16} e^{i\beta k} + \frac{81}{16} e^{i\beta(1+k)} - \frac{9}{16} e^{i\beta(2+k)} \right) \lambda^n \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \\ u_{j+0.5,k+0.5}^{(n)} &= \frac{e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta+2\alpha j+2\beta k)} \lambda^n \left( \frac{351}{64} + \frac{135}{64} \cos \alpha + \frac{9}{8} \cos \beta + \frac{9}{32} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2\beta \right)}{(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}; \end{aligned} \quad (39)$$

Также из (14) получим представления для аппроксимаций частных производных функции  $u(x, y, t)$  в полуцелых узлах:

$$\begin{aligned}
 J_{j+0.5,k}^{y,(n)} &= -\frac{3ie^{\frac{i}{2}(\alpha+2\alpha j+2\beta k)}\lambda^n}{32h_y(2+\cos\alpha)(2+\cos\beta)}\left(\sin\left(\alpha-\frac{5\beta}{2}\right)-3\sin\left(\alpha-\frac{3\beta}{2}\right)\right. \\
 &\quad \left.+28\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-28\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-128\sin\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{3\beta}{2}-2\sin\frac{5\beta}{2}\right. \\
 &\quad \left.+3\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)\right), \\
 J_{j,k+0.5}^{x,(n)} &= \frac{243ie^{\frac{i}{2}(\beta+2\alpha j+2\beta k)}\lambda^n}{32h_x(2+\cos\alpha)(2+\cos\beta)}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{9}\sin\frac{3\alpha}{2}-\frac{1}{18}\sin\frac{\alpha-4\beta}{2}\right. \\
 &\quad \left.+\frac{4}{9}\sin\frac{\alpha-2\beta}{2}-\frac{1}{162}\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-2\beta\right)+\frac{4}{81}\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\beta\right)+\frac{4}{9}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right. \\
 &\quad \left.+\frac{4}{81}\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\beta\right)-\frac{1}{162}\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+2\beta\right)-\frac{1}{18}\sin\frac{\alpha+4\beta}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{40}$$

В соответствии со спектральным признаком Неймана, необходимое условие устойчивости разностной схемы (4) по начальным данным выполнено, если  $|\lambda| \leq 1$ . Таким образом, применив метод замороженных коэффициентов для функций  $D(u)$  и  $K(x, y, t)$ , получим условие ограничения величины шага разностной схемы (4) по времени для  $D(u) > 0$ ,  $K(x, y, t) \leq 0$ :

$$\begin{aligned}
 0 < \tau &\leq \min_{\alpha, \beta} \left[ \frac{h_x^2 h_y^2}{D(q_1(\alpha, \beta)h_x^2 + q_2(\alpha, \beta)h_y^2) - 0.5Kh_x^2 h_y^2} \right], \begin{cases} D = \max_{(x, y, t) \in G_u} D(u(x, y, t)), \\ K = \min_{(x, y, t) \in G_u} K(u(x, y, t)). \end{cases} \\
 q_1(\alpha, \beta) &= \frac{(5 + \cos\beta) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2 + \cos\beta}, q_2(\alpha, \beta) = \frac{(5 + \cos\alpha)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)(7 - \cos\beta)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2(2 + \cos\alpha)(2 + \cos\beta)}; \tag{41}
 \end{aligned}$$

На основе (41) выпишем консервативное условие устойчивости разностной схемы по начальным данным:

$$0 < \tau \leq \frac{h_x^2 h_y^2}{4D(h_x^2 + h_y^2) - 0.5Kh_x^2 h_y^2}, D = \max_{(x, y, t) \in G_u} D(u(x, y, t)), K = \min_{(x, y, t) \in G_u} K(u(x, y, t)). \tag{42}$$

#### 4. Вычислительный эксперимент: сравнение численного и точного аналитического решения

С целью экспериментального подтверждения теоретически найденного значения порядка аппроксимации, которое обеспечивает представленный численный метод, для аналитически заданных функций  $u(x, y, t), D(u), K(x, y, t), \alpha(t)$  была проведена оценка порядка аппроксимации по правилу Рунге. Рассмотрим двухточечную и трехточечную оценки по правилу Рунге.

Определим аналитические функции в модельной задаче для тестирования:

$$u(x, y, t) = T_0 + A \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{y_L} + \omega t\right) \cdot \cos(k_c x), D(u) = 1 + ku, k = \text{const},$$

$$K(x, y, t) = C_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{y_L}\right) + C_2 \cdot \cos(kx), \alpha_1(t) = \frac{-D(u(x_L, y, t_n)) \frac{\partial u(x_L, y, t_n)}{\partial x}}{u(x_L, y, t_n)}; \quad (43)$$

Вспомогательная функция для обеспечения тождественного равенства:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(t, x, y) dx dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (D(u) \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (D(u) \frac{\partial u}{\partial y}) - Ku \right) dx dy. \quad (44)$$

В рамках двухточечной схемы Рунге для оценки порядка аппроксимации будем вычислять отношения ошибок  $p_2 = \frac{\ln(Err_u[h_1]/Err_u[h_2])}{\ln(h_1/h_2)}$  между численными и аналитическими решениями на сетках с  $N/2$  и  $N$  узлами ( $h_1/h_2 = 2$ ). С целью вычисления ошибок применим норму  $L_2$ :

$$Err_u[h] = \| u^{\text{числ.}} - u^{\text{аналит.}} \|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (u_{i,j}^{\text{числ.}} - u_{i,j}^{\text{аналит.}})^2 h_x h_y}. \quad (45)$$

В рамках трехточечной схемы Рунге для оценки порядка аппроксимации будем вычислять отношения ошибок  $p_3 = \log_2 \left( \frac{Err_u[h-h/2]}{Err_u[h/2-h/4]} \right)$  на сетках с  $N/4$ ,  $N/2$  и  $N$  узлами. С целью вычисления ошибок для численных  $u_{i,j}^{\text{числ.}}$  при уменьшении шага в два раза применим норму  $L_2$ , нормирующую индексы для грубой и уточненной сетки, где  $N_x, N_y$  соответствуют грубой сетке:

$$Err_u[h-h/2] = \| u_h - u_{h/2} \|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (u_h(i,j) - u_{h/2}(2i, 2j))^2 h_x h_y}. \quad (46)$$

Полученные параметры  $p_2$  и  $p_3$ , соответствующие двухточечной и трехточечной схемам Рунге для оценки порядка аппроксимации метода, представлены в табл. 1.

**Таблица 1.** Результаты оценки порядка аппроксимации по правилу Рунге

$N_x$	$N_x$	$h$	$h_x = 5h$	$h_y = 4h$	$Err(u)$	$p_2$	$p_3$	$\tau$
8	10	2,50E-02	1,25E-01	1,00E-01	3,79E+00	NaN	NaN	7,63E-10
16	20	1,25E-02	6,25E-02	5,00E-02	1,16E-01	5,0353	NaN	7,63E-10
32	40	6,25E-03	3,13E-02	2,50E-02	7,33E-03	3,9798	5,0059	7,63E-10
64	80	3,13E-03	1,56E-02	1,25E-02	4,10E-04	4,1603	3,94	7,63E-10
128	160	1,56E-03	7,81E-03	6,25E-03	2,32E-05	4,1442	4,1414	7,63E-10
256	320	7,81E-04	3,91E-03	3,13E-03	1,49E-06	3,9638	4,1376	7,63E-10

Как видно из результатов серии экспериментов, оценки порядка сходимости, полученные по двухточечной (параметр  $p_2$ ) и трехточечной (параметр  $p_3$ ) схемам Рунге, стабилизируются в окрестности значения 4, что свидетельствует о четвертом порядке аппроксимации представленного численного метода.

## 5. Заключение

В статье представлена разностная схема численного интегрирования смешанной начально-краевой задачи для двумерного уравнения диффузии в квазилинейной постановке. Рассмотренный численный метод является обобщением представленного ранее [25] численного метода для одномерного параболического дифференциального уравнения. Разностная схема обеспечивает четвертый порядок пространственной аппроксимации, что подтверждается как теоретическими расчетами, так и результатами, полученными в рамках проведения серии вычислительных экспериментов. По переменной  $x$  операторы разностной схемы строятся на шаблоне, контрольный объем которого равен  $2h_x$ . Также найдено условие устойчивости в случае применения явной схемы для шага по времени. Предлагаемая методика построения разностной схемы позволяет применить аналогичный подход в случае трехмерной задачи с сохранением четвертого порядка пространственной аппроксимации.

## Список источников

1. Самарский А. А. Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 2001. 319 с. ISBN 5-02-006505-6., С. 235.
2. Ковеня В. М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
3. Яненко Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959. 125, № 6. С. 1207–1210.
4. Яненко Н. Н. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Вып. 2, № 5. С. 933–937.
5. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. С. 787–811.
6. Дьяконов Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Вып. 2, № 4. С. 549–568.
7. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Вып. 3, № 3. С. 431–466.
8. Hubbard B. Some locally one-dimensional difference schemes for parabolic equations in an arbitrary region // Math. Comp. 1966. Vol. 20. P. 53–59.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1967.
10. Лекомцев А. В., Пименов В. Г. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 102–118.
11. Xiao-Yu L., Bao-Lin Z. Local one-dimensional ase-i scheme for 2D diffusion equation. Wuhan Univ. J. of Nat. Sci. 1, C. 515–521 (1996).

12. *Wu Yu, Ge Yongbin, Zhang Lin*, A high-order compact LOD difference method for solving the two-dimensional diffusion reaction equation with nonlinear source term // *Journal of Computational Science*. 2022. Vol. 62. 101748.
13. *Шхануков-Лафшиев М. Х.* Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009. Т. 49, № 7, С. 1223–1231.
14. *Douglas Jr. J., Rachford H. H.* On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. Vol. 82. P. 421–439.
15. *Chang M. J., Chow L. C., Chang W. S.* (1991): Improved alternating-direction implicit method for solving transient three-dimensional heat diffusion problems, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 19:1, 69–84.
16. *Momoniat E., Harley C.* Peaceman-Rachford ADI Scheme for the Two-Dimensional Flow of a Second-Grade Fluid // *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. 2012. Vol. 22, iss: 2. P. 228–242
17. *Rubin S., Graves R. A.* Viscous flow solutions with cubic spline approximation // *Comput. Fluids*. 1975. Vol. 3, № 1. P. 1–36.
18. *Русаков С. В.* Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. С. 95–102.
19. *Казаков В. А.* Об одном подходе к применению В-сплайнов в схемах расщепления для решения уравнений Навье–Стокса // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1988. Т. 28, № 7. С. 1038–1046.
20. *Ковеня В. М., Слюняев А. Ю.* Модификации алгоритмов расщепления для решения уравнений газовой динамики и Навье–Стокса // *ЖВТ*. 2007. Т. 12, №3, С. 71–86.
21. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1961. Т. 1, № 3. С. 425–440.
22. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П.* Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // *Дифференциальные уравнения*. 1996. Т. 32, № 2. С. 269–280.
23. *Čiegis R., Suboč O.* High order compact finite difference schemes on nonuniform grids // *Applied Numerical Mathematics*. 2018. Vol. 132. С. 205–218.
24. *Rusakov S. V., Gilev, V. G., Rakhmanov, A. Y.* Diffusion-Kinetic Model for Curing of Epoxy Polymer. In: Domoshnitsky, A., Rasin, A., Padhi, S. (eds) *Functional Differential Equations and Applications. FDEA* // *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2019. Vol. 379. Springer, Singapore.
25. *Толстых А. И.* О мультиоператорном методе построения аппроксимаций и схем произвольно высокого порядка // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2011. Т. 51, № 1. С. 56–73.
26. *Русаков С. В., Рахманов А. Ю.* Сплайн-схема повышенного порядка точности для интегрирования диффузионно-кинетических уравнений // *Математические методы в технологиях и технике*. 2024. № 2. С. 13–16.
27. *Русаков С. В.* Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. С. 8–16.
28. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. С. 96–101.
29. *Demko S., Moss W. F., Smith P. W.* Decay Rates for Inverses of Band Matrices // *Mathematics of Computation*. 1984. Vol. 43, iss. 168. P. 491–499. DOI:10.1090/S0025-5718-1984-0758197-9.

## References

1. Samarskii, A. A. and Vabishchevich, P. N. (2001), *Additivnye skhemy dlya zadach matematicheskoy fiziki* [Additive schemes for mathematical physics problems], Nauka, Moscow, Russia, pp. 235.
2. Kovenya, V. M. (2014), *Algoritmy rasshchepleniya pri reshenii mnogomernykh zadach aerogidrodinamiki* [Splitting Algorithms for Solving Multi-Dimensional Problems of Aerohydrodynamics], Siberian branch of RAS, Novosibirsk, Russia.
3. Yanenko, N. N. (1959), "A difference method of calculating the multidimensional equations of heat conduction", *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, vol. 125, no 6, pp. 1207–1210.
4. Yanenko, N. N. (1962) "On the convergence of the splitting method for the heat conductivity equation with variable coefficients", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 2, no. 5, pp. 933–937.
5. Samarskii, A. A. (1962) "On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 2, no. 5, pp. 787–811.
6. Diakonov, E. G. (1962) "Difference schemes with a splitting operator for nonstationary equations", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vVol. 2, no. 4, pp. 549–568.
7. Samarskii, A. A. (1963), "Local one-dimensional difference schemes on non-uniform nets", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 3, no. 3, pp. 431–466.
8. Hubbard, B. (1966), "Some locally one-dimensional difference schemes for parabolic equations in an arbitrary region", *Math. Comp.*, vol. 20. pp. 53–59.
9. Yanenko, N. N. (1967), *Metod drobnyh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki* [Fractional step method for solving multidimensional problems in mathematical physics], Siberian branch of RAS, Novosibirsk, Russia.
10. Lekomtsev, A. V. and Pimenov, V. G. (2010), "Convergence of the alternating direction method for the numerical solution of a heat conduction equation with delay", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 16, no. 1, pp. 102–118.
11. Xiao-Yu L., Bao-Lin Z. (1996), "Local one-dimensional ase-i scheme for 2D diffusion equation", *Wuhan Univ. J. of Nat. Sci.*, vol. 1, pp. 515–521.
12. Wu, Yu, Ge, Y. and Zhang, L. (2022), "A high-order compact LOD difference method for solving the two-dimensional diffusion reaction equation with nonlinear source term", *Journal of Computational Science*, vol. 62, P. 101748.
13. Shhanukov-Lafishev, M. H. (2009), "Locally one-dimensional scheme for a loaded heat equation with Robin boundary conditions", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 49, no. 7, pp. 1223–1231; *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 49, no. 7, pp. 1167–1174.
14. Douglas, Jr. J. and Rachford, H. H. (1956), "On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables", *Trans. Amer. Math. Soc*, vol. 82. pp. 421–439.
15. Chang, M. J., Chow, L. C. and Chang, W. S. (1991), "Improved alternating-direction implicit method for solving transient three-dimensional heat diffusion problems", *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, vol. 19, no.1, pp. 69–84.
16. Momoniat, E. and Harley C. (2012), "Peaceman-Rachford ADI Scheme for the Two-Dimensional Flow of a Second-Grade Fluid", *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, vol. 22, pp. 228–242.
17. Rubin, S. and Graves, R. A. (1975), "Viscous flow solutions with cubic spline approximation", *Comput. Fluids.*, vol. 3, no 1, pp. 1–36.

18. Rusakov, S. V. (1990), *Raznostnye splajn-skhemy dlya zadach teplo- i massoperenosa* [Difference Spline Schemes for Heat and Mass Transfer Problems], Izd. Irkutsk. Univ., Irkutsk, Russia, pp. 95–102.
19. Kazakov, V. A. (1988), "An approach to using B splines in splitting schemes to solve the Navier–Stokes equations", *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, vol. 28, no 7, pp. 1038–1046.
20. Kovenya, V. M. and Slyunyaev, A. Yu. (2007), "Modifications of splitting algorithms for solving the equations of gas dynamics and Navier-Stokes", *Zhurnal Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 12, no 3, pp. 71–86.
21. Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A. (1961), "Homogeneous difference schemes of high order of accuracy on non-uniform sets", *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, vol. 1, no 3, pp. 425–440.
22. Samarskii, A. A., Vabishchevich, P. N. and Matus, P. P. (1996), "Difference schemes of high order of precision on irregular grids", *Different. Urav.*, vol. 32, no 2, pp. 269–280.
23. Čiegis, R. and Suboč, O. (2018), "High order compact finite difference schemes on non-uniform grids", *Applied Numerical Mathematics*, vol. 132, pp. 205–218.
24. Rusakov, S. V., Gilev, V. G. and Rakhmanov, A. Y. (2021), "Diffusion-Kinetic Model for Curing of Epoxy Polymer", In: Domoshnitsky, A., Rasin, A., Padhi, S. (eds) *Functional Differential Equations and Applications. FDEA 2019. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 379, Springer, Singapore.
25. Tolstykh, A. (2011), "On the Multioperator Method for Constructing Approximations and Finite Difference Schemes of an Arbitrarily High Order", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 51, no 1, pp. 56–73.
26. Rusakov, S. V. and Rakhmanov, A. Yu. (2024), "A spline scheme of an increased order of accuracy for the integration of diffusion-kinetic equations", *Matematicheskie metody v tekhnologiyah i tekhnike*, no 2, pp. 13–16.
27. Rusakov, S. V. (1990), *Raznostnye splajn-skhemy dlya zadach teplo- i massoperenosa* [Difference Spline Schemes for Heat and Mass Transfer Problems], Izd. Irkutsk. Univ., Irkutsk, Russia, pp. 8–16.
28. Zavialov, Yu. S., Kvasov, B. I. and Miroshnichenko, V. L. (1980), *Metody splajn funkciij* [Methods of spline-functions], Nauka, Moscow, Russia, pp. 96–101.
29. Demko, S., Moss, W. F. and Smith, P. W. (1984), "Decay Rates for Inverses of Band Matrices", *Mathematics of Computation*, v. 43(168), P. 491–499. DOI:10.1090/S0025-5718-1984-0758197-9.

#### Информация об авторах:

А. Ю. Рахманов – аспирант направления "Информатика и вычислительная техника" физико-математического института Пермского государственного национально-исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 1238074, ORCID: 0009-0001-3332-2124, Scopus ID: 57226198082, Web of Science ResearcherID: KSM-1753-2024;

С. В. Русаков – доктор физико-математических наук, профессор, профессор центра прикладной математики и физики физико-математического института Пермского государственного национально-исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 16433, ORCID: 0000-0001-6862-1100, Scopus ID: 56085029200, Web of Science ResearcherID: JYP-8622-2024.

#### Information about the authors:

A. Yu. Rakhmanov – Postgraduate student in Computer Science and Computer Engineering, Physics and Mathematics Institute of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia,

614068), AuthorID: 1238074, ORCID: 0009-0001-3332-2124, Scopus ID: 57226198082, Web of Science ResearcherID: KSM-1753-2024;

S. V. Rusakov – Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Professor of Applied Mathematics and Physics Center, Physics and Mathematics Institute of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 16433, ORCID: 0000-0001-6862-1100, Scopus ID: 56085029200, Web of Science ResearcherID: JYP-8622-2024.