Научная статья
УДК 519.6
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-31-43
https://elibrary.ru/nfpfrh

Численное решение уравнений Фредгольма с двойной точностью методом вырождения интегрального ядра

Дмитрий Феликсович Пастухов[1], **Юрий Феликсович Пастухов**[2]
[1, 2]Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Белоруссия
[1]dmitrij.pastuhov@mail.ru
[2]pulsar1900@mail.ru

Аннотация. В работе впервые предложен модифицированный метод вырождения интегрального ядра для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Идея заключается в том, чтобы интегральное ядро разложить в ряд Тейлора по одной переменной x, а не по двум переменным x, s как в классическом методе. Разложение ядра в ряд проводится в средней точке отрезка интегрирования, что уменьшает модули элементов матрицы C, а также область невырожденности для матрицы $I–\lambda C$. Используется система степенных базисных функций на отрезке интегрирования. Получены три теоремы для достаточных условий корректности предложенного алгоритма методом вырождения интегрального ядра. Введено определение факториальной нормы Чебышева вектор-функции. Факториальная норма для системы частных производных интегрального ядра по переменной x и параметр λ входят в неравенство третьей теоремы – достаточное условие корректности алгоритма. Предложенный в работе численный алгоритм тестировался на трех интегральных уравнениях Фредгольма с ядрами с экспоненциальным ростом или с периодическим изменением знака ядра. Численные решения совпадают с точными решениями в 15 значащих знаках в равномерной метрике.

Ключевые слова: *уравнения Фредгольма; численные метод; интегральные уравнения; матричный метод.*

Для цитирования: Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Численное решение уравнений Фредгольма с двойной точностью методом вырождения интегрального ядра // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 31–43. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-31-43. https://elibrary.ru/nfpfrh.

Статья поступила в редакцию 14.07.2025; одобрена после рецензирования 20.08.2025; принята к публикации 26.09.2025.

Research article

Numerical Solution of Fredholm Equations With Double Precision by the Integral Kernel Degeneracy Method

Dmitry F. Pastuhov[1], **Yuri F. Pastuhov**[2]

[1, 2]Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus
[1]dmitrij.pastuhov@mail.ru
[2]pulsar1900@mail.ru

Abstract. The work for the first time proposed a modified method of degeneration of the integral nucleus to solve the integrated equations of Fredgolm of the second kind. The idea is to put the integral core in a series of Taylor along one variable *x*, and not in two variables *x, s* as in the classical method. The decomposition of the nucleus in the row is carried out at the middle point of the integration segment, which reduces the modules of the elements of the matrix *C*, as well as the area of disaster for the $I - \lambda C$ matrix. The system of degree basic functions is used at the integration segment. Three theorems are offered for sufficient conditions for the correctness of the proposed algorithm by the degeneration of the integral nucleus. The definition of the factorial norm of Chebyshev Vector-functions has been introduced. The factual norm for the system of private derivatives of the integral nucleus on the variable *x* and the parameter λ are included in the inequality of the third theorem – a sufficient condition for the correctness of the algorithm. The numerical algorithm proposed in the work was tested on three integral equations of Fredgolm with nuclei with exponential growth or with a periodic change in the sign of the nucleus. Numerical solutions coincide with accurate solutions in 15 significant signs in a uniform metric.

Keywords: *Fredgolm equations; numerical methods; integral equations; matrix method.*

For citation: Pastuhov, D. F. and Pastuhov, Yu. F. (2025), "Numerical Solution of Fredholm Equations With Double Precision by the Integral Kernel Degeneracy Method", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(70), pp. 31–43, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-31-43, https://elibrary.ru/nfpfrh.

The article was submitted 14.07.2025; approved after reviewing 20.08.2025; accepted for publication 26.09.2025.

Введение

Методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры подробно описаны в работе [1]. Прямые методы [1, стр. 135] и проекционные методы [1, стр. 139]. В работе [2] для решения интегральных уравнений Фредгольма используются сплайны обобщенного вида, интегральное ядро может быть непрерывным, гладким или дважды дифференцируемым на квадрате. Благодаря второму порядку аппроксимации интегрального ядра $O(h^2)$ требуется большое число интервалов аппроксимации. В работах [3, 4] предложен метод подбора подобластей на базе полиномов Канторовича для решения уравнения Фредгольма второго рода, а также рассматривается специальный вариант метода коллокации на базе полиномов Бернштейна для решения уравнений Фредгольма второго рода, приведены оценки корректности алгоритмов. В работе [5] применен метод коллокации для решения интегрального уравнения Вольтерры второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра, произведение интегрального ядра на приближенное решение раскладывается в частичную сумму по системе многочленов Чебышева или многочленов Лежандра. Достигнута минимальная норма Чебышева для невязки задачи 10^{-13}. В работе

[6] решается система интегральных уравнений методом коллокации с узлами многочленов Чебышева первого и второго рода, получены теоретические оценки для корректности алгоритма. В работе [7] предложен метод решении системы нелинейных интегральных уравнений сверточного типа с монотонно выпуклой нелинейностью. В работе [8] предложен обобщенный метод Петрова–Галеркина для решения системы линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

В работе [9] методом замены интеграла с квадратурной интегральной формулой с двенадцатым порядком погрешности получено табличное решение линейного интегрального уравнения с двойной точностью. В данной работе, как и в работах [2–8] решение имеет функциональный вид, но использованы более простые координатные степенные функции. Метод получил название *модифицированного метода вырождения интегрального ядра для решения линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода*. Для достаточно гладкого интегрального ядра по переменной x можно использовать всего двадцать базисных функций и тридцать интервалов интегрирования в квадратурных формулах для достижения двойной точности решения. То есть, во всех примерах норма Чебышева невязки решения равна 10^{-15}, единственный недостаток алгоритма заключается в явном знании формул для частных производных ядра по переменной x. Алгоритм тестировался на примерах с экспоненциальным изменением интегрального ядра или с периодическим изменением знака ядра. Доказаны 3 теоремы (достаточные условия существования и единственности численного решения задачи (1) алгоритмом (2)–(7)). Полученный алгоритм вместе с известными методами благодаря простоте и высокой точности решения поможет решать интегральные уравнения Фредгольма второго рода с достаточно гладкими интегральными ядрами.

Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода [1, стр.135]

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x),\ (x,s)\in[a,b]\times[a,b]. \tag{1}$$

В уравнении (1) параметр λ, интегральное ядро $K(x,s)\in L_2[a,b]\times[a,b]$ и правая часть – функция $f(x)$ заданы. Неизвестная функция должна быть интегрируема с квадратом на отрезке $[a,\ b]$ $y(x)\in L_2[a,b]$. Пусть также частные производные ядра по переменной x непрерывны на квадрате $K_x^{(i)}(x,s)\in C[a,b]\times[a,b], i=\overline{0,n}$.

Известен прямой метод решения интегрального уравнения (1) методом вырожденного ядра [1, стр. 135], который заключается в том, чтобы интегральное ядро разложить в ряд по переменным $x,\ s$. То есть, заменить интегральное ядро полиномом двух переменных, как, например, в задаче 29.11 [1, стр. 138]. А затем решить уравнение (1) методом замены ядра. В классическом методе требуется две системы базисных линейно независимых функций $\{A_i(x)\}_{i=1}^n, \{B_i(x)\}_{i=1}^n$. По одной из систем раскладывается решение, а ядро представляется суммой попарных произведений функций по одной из каждой системы [1, стр. 138]. Чтобы из интегрального ядра $K(x,s)$ произвольного вида получить полином по двум переменным необходимо разложить ядро в ряд Тейлора по переменным $x,\ s$. В этом идея традиционного подхода решения уравнения (1) методом замены интегрального ядра.

Модифицируем известный метод. В данном случае понадобится одна система линейно-независимых функций $\{A_i(x)\}_{i=0}^n,\ x\in[a,b]$. Будем рассматривать симметричную переменную $y\Big|_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = x\Big|_a^b - \dfrac{a+b}{2}$, $c = \dfrac{a+b}{2}$, $h = \dfrac{b-a}{2}$ относительно середины отрезка $c = \dfrac{a+b}{2}$, $y \in [-h, h]$ и систему линейно независимых степенных функций $\left\{A_i(y) = y^i\right\}_{i=0}^{n}, y \in \left[-\dfrac{b-a}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right]$.

Идея модифицированного метода вырождения ядра заключается в том, чтобы разложить ядро $K(x,s)$ по первой переменной x в центре отрезка $c = \dfrac{a+b}{2}, x = c + y, dx = dy$. Получаем

$$K(x,s) = K(c+y,s) = \sum_{i=0}^{n} K_x^{(i)}(c,s)\frac{y^i}{i!} + O\left(y^{n+1}\right), K_n(x,s) = \sum_{j=0}^{n} K_x^{(i)}(c,s)\frac{y^i}{i!}. \qquad (2)$$

В формуле (2) обозначим $K_x^{(i)}(c,s) = q_i(s),\ i = \overline{0,n}, s \in [a,b]$. Разложим решение $y(x)$ на отрезке $[a\ ,b]$ в сумму

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=0}^{n} A_i(y) D_i\ . \qquad (3)$$

В формуле (3) $D_i, i = \overline{0,n}$ – называется *вектором коэффициентов разложения решения по базисным функциям* $\left\{A_i(y) = y^i\right\}_{i=0}^{n}$.

Подставим разложения (2), (3) в уравнение Фредгольма второго рода (1).

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x), A_i(y) = y^i \Leftrightarrow$$

$$f(x) + \lambda \sum_{i=0}^{n} y^i D_i - \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^{n} q_i(s) \frac{y^i}{i!}\left(f(s) + \lambda \sum_{j=0}^{n} A_j (s-c)^j D_j \right) ds = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} y^i D_i - \int_a^b \sum_{i=0}^{n} q_i(s) \frac{y^i}{i!}\left(f(s) + \lambda \sum_{j=0}^{n} (s-c)^j D_j \right) ds = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} y^i \left\{ D_i - \lambda \sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds \right) D_j \right\} = \sum_{i=0}^{n} y^i \left\{ \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds \right\} \Leftrightarrow$$

$$D_i - \lambda \sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds \right) D_j = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds,\ i = \overline{0,n}. \qquad (4)$$

Если ввести обозначения в системе из n уравнений (4)

$$C_{i,j} = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds,\ i,j = \overline{0,n}, \quad f_i = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds,\ i = \overline{0,n}, \qquad (5)$$

то получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $D_j, j=\overline{0,n}$:

$$D_i - \lambda \sum_{j=0}^{n} C_{i,j} D_j = f_i,\ i=\overline{0,n}. \tag{6}$$

Систему уравнений (6) можно переписать в матричном виде (7):

$$D_i - \lambda \sum_{j=0}^{n} C_{i,j} D_j = f_i,\ i=\overline{0,n}\ ,\left(I-\lambda C\right)D = f \Leftrightarrow D = \left(I-\lambda C\right)^{-1} f. \tag{7}$$

Обратная матрица $\left(I-\lambda C\right)^{-1}$ в программе вычислялась библиотекой Msimsl на языке Fortran. Где: матричные элементы $C_{i,j}$ и коэффициенты правой части (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} C_{i,j} = \int\limits_a^b \dfrac{q_i(s)}{i!}\left(s-c\right)^j ds = \int\limits_{-h}^{h} \dfrac{q_i(c+y)}{i!} y^j dy,\ i,j=\overline{0,n},\ h=\dfrac{b-a}{2}, y\in[-h,h], \\ f_i = \int\limits_a^b \dfrac{q_i(s)}{i!} f(s) ds = \int\limits_{-h}^{h} \dfrac{q_i(c+y)}{i!} f(c+y) dy,\ i=\overline{0,n}. \end{cases} \tag{8}$$

Во-первых. В формулах (8) переменная $y\in[-h,h]$ изменяет знак и принимает абсолютное значение меньшее, чем переменная x на отрезке $[a, b]$, поэтому элементы матрицы $C_{i,j}$ по модулю будут меньше чем, если использовать систему базисных функций $\left\{A_i(y)=y^i\right\}_{i=0}^{n}, y\in[-h,h]$ вместо системы функций $\left\{A_i(x)=x^i\right\}_{i=0}^{n}, x\in[a,b]$ (в работе [1, стр. 137]). Это уменьшит норму матрицы $\|C\|$ и расширит область невырожденности матрицы $I-\lambda C$, то есть расширит область существования обратной матрицы $\left(I-\lambda C\right)^{-1}$.

Во-вторых. Базисные функции $\left\{A_i(y)=y^i\right\}_{i=0}^{n}$ степенного вида не только входят множителями в разложение в ряд Тейлора (2) интегрального ядра $K(x,s)$ по переменной x, но также обеспечивают корректность СЛАУ (4).

В-третьих. Решение (3) является функцией-полиномом степени n, которое можно сравнить с точным решением в каждой точке отрезка $x\in[a,b]$ в отличие от работы [9], где решение ищется в табличном виде (вектора) на узлах сетки.

В-четвертых. В работе [9, стр. 11] приведена интегральная квадратурная формула (9) для вычисления определенного интеграла с двенадцатым порядком погрешности, которая используется в данной работе для вычисления элементов матрицы и коэффициентов правой части системы (6) по формулам (8):

$$\left\langle y_1, y_2 \right\rangle = \int\limits_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 5h\cdot \sum_{i=0}^{n_1} C_i y_1\left(x_i\right) y_2\left(x_i\right) + O\left(h^{12}\right),\ n_1 = 10p, h=\frac{b-a}{n_1}, p\in N, \tag{9}$$

где:

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, \textit{если } i = 0 \textit{ или } i = n_1, \\ \frac{16067}{149688}, \textit{если } (i \equiv 0 \bmod 10) \textit{ и } (0 < i < n_1), \\ \frac{26575}{74844}, \textit{если } (i \equiv 1 \bmod 10) \textit{ или } (i \equiv 9 \bmod 10), \\ \frac{-16175}{99792}, \textit{если } (i \equiv 2 \bmod 10) \textit{ или } (i \equiv 8 \bmod 10), \\ \frac{5675}{6237}, \textit{если } (i \equiv 3 \bmod 10) \textit{ или } (i \equiv 7 \bmod 10), \\ \frac{-4825}{5544}, \textit{если } (i \equiv 4 \bmod 10) \textit{ или } (i \equiv 6 \bmod 10), \\ \frac{17807}{12474}, \textit{если } i \equiv 5 \bmod 10. \end{cases}$$

Таким образом, алгоритм (2)–(9) решает численно уравнение Фредгольма второго рода (1), обратная матрица $(I - \lambda C)^{-1}$ в формуле (7) вычислялась библиотекой Msimsl в компиляторе Fortran. Алгоритм (2)–(7) назовем решением интегрального уравнения Фредгольма (1) методом вырождения интегрального ядра.

Теорема 1 (критерий существования и единственности решения в алгоритме (2)–(7)). Для того чтобы алгоритм (2)–(7) имел единственное решение необходимо и достаточно, чтобы матрица $I - \lambda C$ была невырожденной.

Доказательство Теоремы 1 следует из формулы (7), в которой требуется существование обратной матрицы $(I - \lambda C)^{-1}$, что эквивалентно неравенству нулю определителя матрицы $I - \lambda C, \det(I - \lambda C) \neq 0$. Теорема 1 доказана. Здесь I – единичная матрица порядка n.

Теорема 2 (достаточные условия корректности алгоритма (2)–(7)). Пусть норма вектора f в уравнении (7) конечна. Если $q = |\lambda| \|C\| < 1$, то алгоритм (2)–(7) корректен и справедлива оценка нормы обратной матрицы $\left\|(I - \lambda C)^{-1}\right\| < \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - |\lambda| \|C\|}$.

Доказательство. По условию теоремы 2 $q = |\lambda| \|C\| < 1$. Поэтому справедливо представление обратной матрицы рядом

$$(I - \lambda C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C^k, \left\|(I - \lambda C)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \|C\|^k = \frac{1}{1 - |\lambda| \|C\|} < \infty .$$

$\|D\| = \left\|(I - \lambda C)^{-1} f\right\| \leq \left\|(I - \lambda C)^{-1}\right\| \|f\| \leq \frac{\|f\|}{1 - |\lambda| \|C\|} < \infty$. **Теорема 2** доказана.

Определение 1. Факториальной нормой Чебышева вектор-функции $f(x) : [a,b] \to C([a,b], R^{n+1}), f(x) = \{f_0(x), f_1(x), ..., f_n(x)\}$ назовем число $\|f\|_{\infty}^{F} = \max\limits_{\substack{x \in [a,b] \\ i = \overline{0,n}}} \frac{|f_i(x)|}{i!}$

Теорема 3. Выполнение условия $\|q\|_\infty^F < \dfrac{1}{2|\lambda| sh(h)}$ достаточно для корректности алгоритма (2)-(7).

Доказательство. Пусть выполнены условия **Теоремы 2** $q = |\lambda|\|C\| < 1$. Оценим бесконечную норму матрицы *C*, используя формулу (8).

$$\|C\|_\infty = \max_{i=0,n} \sum_{j=0}^{n} |C_{i,j}| = \max_{i=0,n} \sum_{j=0}^{n} \left| \int_{-h}^{h} \frac{q_i(c+y)}{i!} y^j dy \right| \le \sum_{j=0}^{n} \max_{i=0,n} \frac{1}{i!} \left| \int_{-h}^{h} \frac{q_i(c+y)}{i!} y^j dy \right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n=2k} \max_{\substack{i=0,n \\ y\in[-h,h]}} \frac{1}{i!} |q_i(c+y)| \left| \int_{-h}^{h} y^j dy \right| = \sum_{j=0}^{n=2k} \|q\|_\infty^F \left| \int_{-h}^{h} y^j dy \right| = 2\|q\|_\infty^F \left(h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \ldots + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} \right).$$

Поскольку $e^h = 1 + h + \dfrac{h^2}{2!} + \dfrac{h^3}{3!} + \dfrac{h^4}{4!} + \dfrac{h^5}{5!} + \ldots, e^{-h} = 1 - h + \dfrac{h^2}{2!} - \dfrac{h^3}{3!} + \dfrac{h^4}{4!} - \dfrac{h^5}{5!} + \ldots$, то

$$e^h - e^{-h} = 2\left(h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \ldots \right) \Leftrightarrow h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \ldots = \frac{e^h - e^{-h}}{2} = sh(h).$$

Обозначим конечную сумму:

$$I_{n=2k} = h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \ldots + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}, I_{n=2k} + R_{n=2k} = sh(h), I_{n=2k} < sh(h), R_{n=2k} > 0.$$

$$R_{n=2k} = sh(h) - I_{n=2k} = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} + \frac{h^{2k+5}}{(2k+5)!} + \frac{h^{2k+7}}{(2k+7)!} + \frac{h^{2k+9}}{(2k+9)!} + \ldots =$$

$$= \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \left(1 + \frac{(2k+3)!}{(2k+5)!} h^2 + \frac{(2k+3)!}{(2k+7)!} h^4 + \frac{(2k+3)!}{(2k+9)!} h^6 + \ldots \right) = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{h^2}{(2k+4)(2k+5)} + \frac{h^4}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)} + \frac{h^6}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)(2k+8)(2k+9)} + \ldots \right) \le$$

$$\le \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \left(1 + \left(\frac{h}{2k+4}\right)^2 + \left(\frac{h}{2k+4}\right)^4 + \left(\frac{h}{2k+4}\right)^6 + \ldots \right) = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{h}{2k+4}\right)^2}.$$

$$sh(h) - I_{n=2k} \le \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{h}{2k+4}\right)^2} \Leftrightarrow I_{n=2k} \ge sh(h) - \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{h}{2k+4}\right)^2}.$$

Поскольку $q = |\lambda|\|C\| < 1 \Leftrightarrow \|C\| < \dfrac{1}{|\lambda|}$ а также $\|C\|_\infty \le 2\|q\|_\infty^F I_{n=2k} < \dfrac{1}{|\lambda|}$, то верны оценки

$$\|q\|_\infty^F < \frac{1}{2|\lambda| sh(h)} < \frac{1}{2|\lambda| I_{n=2k}} \le \frac{1}{2|\lambda| \left(sh(h) - \dfrac{1}{(2k+3)!} \dfrac{h^{2k+3}}{\left(1 - \left(\dfrac{h}{2k+4}\right)^2\right)} \right)}, n = 2k. \tag{10}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Отметим, что в правой части неравенства (10) обе оценки фактически совпадают, поскольку если положить n=2k=10, h=π/2 добавочное слагаемое очень мало.

$$\frac{1}{(2k+3)!}\frac{h^{2k+3}}{\left(1-\left(\frac{h}{2k+4}\right)^2\right)}=\frac{1}{13!}\frac{1.57^{13}}{\left(1-\left(\frac{1.57}{14}\right)^2\right)}\approx 5.73\cdot 10^{-8}.$$

Теорема 4

1) Пусть C – положительная матрица, $C_{i,j}>0,\ i,j=\overline{0,n}$ и $\lambda>0$ (либо C – отрицательная матрица, $C_{i,j}<0, i,j=\overline{0,n}$ и $\lambda<0$) с элементами главной диагонали $1-|\lambda||C_{i,i}|>|\lambda|\sum\limits_{j=0,j\neq i}^{n}|C_{i,j}|, i=\overline{0,n}$, тогда алгоритм (2)–(7) корректен.

2) Верна оценка для нормы обратной матрицы

$$\frac{1}{r^*}\leq\left\|(I-\lambda C)^{-1}\right\|_\infty\leq\frac{1}{r_*}, r_*=\min_{i=0,n}\left(1-\lambda\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}\right), r^*=\max_{i=0,n}\left(1-\lambda\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}\right).$$

Доказательство

1) По условию **Теоремы 4**

$$1-|\lambda||C_{i,i}|>|\lambda|\sum_{j=0,j\neq i}^{n}|C_{i,j}|, i=\overline{0,n}\Leftrightarrow|\lambda|\sum_{j=0}^{n}C_{i,j}<1\Rightarrow\max_{i=0,n}|\lambda|\sum_{j=0}^{n}|C_{i,j}|=|\lambda|\|C\|_\infty<1.$$

По **Теореме 2** алгоритм (2)–(7) корректен и существует обратная матрица $(I-\lambda C)^{-1}$ с ограниченной нормой.

2) Диагональные элементы матрицы $I-\lambda C$ положительны $1-|\lambda||C_{i,i}|>|\lambda|\sum\limits_{j=0,j\neq i}^{n}|C_{i,j}|\geq 0$, а недиагональные отрицательны так как $-\lambda C_{i,j}<0\forall i,j=\overline{0,n}, i\neq j$. Также по условию **Теоремы 4** матрица $I-\lambda C$ имеет строгое диагональное преобладание. Тогда выполнены все условия Теоремы Ю. С. Волкова, В. Л. Мирошниченко [10] для матрицы монотонного вида $I-\lambda C$ и справедлива оценка

$$\frac{1}{r^*}\leq\left\|(I-\lambda C)^{-1}\right\|_\infty\leq\frac{1}{r_*}, r_*=\min_{i=0,n}\left(1-\lambda\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}\right)>0, r^*=\max_{i=0,n}\left(1-\lambda\sum_{i=0}^{n}C_{i,j}\right)>0.$$

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим **пример 1**.

$$y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-s}y(s)ds=e^x. \tag{11}$$

С точным решением $y(x)=2e^x$. Выполним проверку:

$$2e^x-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-s}2e^s ds=e^x\Leftrightarrow 2e^x-e^x=e^x.$$

Применим алгоритм (2)–(9) и достаточные условия корректности алгоритма (Теорему 3) к примеру (10), получим (n = 20):

$\lambda = 1/2,\ K(x,s) = e^{x-s},\ f(x) = e^x, a = 0, b = 1, c = h = 1/2, K_x^{(i)}(c,s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(1/2,s) = e^{1/2-s},$

$$i = \overline{0,n}, s \in [0,1], \|q\|_\infty^F < \frac{1}{2|\lambda| sh(h)} \Leftrightarrow \|q\|_\infty^F = \max_{\substack{s\in[0,1],\\ i=0,n}} \frac{\left|e^{1/2-s}\right|}{i!} = e^{1/2} \approx 1.649 < \frac{1}{2\cdot(1/2)sh(1/2)} \approx 1.919.$$

Таблица 1. *Численное и точное решение примера (10). Число базисных функций n =20, число интервалов* $n_1 = 10$ *в квадратурной формуле (9)*

x	u^{num}	u^{exact}	$u^{num} - u^{exact}$
0.000000000000000E+000	2.00000000000000	2.00000000000000	8.88178419E-016
0.100000000000000	2.21034183615130	2.21034183615130	4.44089209E-016
0.200000000000000	2.44280551632034	2.44280551632034	-4.4408920E-016
0.300000000000000	2.69971761515201	2.69971761515201	4.44089209E-016
0.400000000000000	2.98364939528254	2.98364939528254	0.0000000000E+000
0.500000000000000	3.29744254140026	3.29744254140026	8.881784197E-016
0.600000000000000	3.64423760078102	3.64423760078102	8.881784197E-016
0.700000000000000	4.02750541494095	4.02750541494095	8.8817841970E-016
0.800000000000000	4.45108185698493	4.45108185698494	-8.881784197E-016
0.900000000000000	4.91920622231390	4.91920622231390	8.8817841970E-016
1.00000000000000	5.43656365691809	5.43656365691809	8.8817841970E-016

С нормой Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы:

$$\left\|u^{num} - u^{exact}\right\|_C = \max_{i=0,n_1}\left|u_i^{num} - u_i^{exact}\right| = 8.8817\text{E-}016, x_i = a + h\cdot i, i = \overline{0,n_1}.$$

По найденному решению (3), можно найти норму невязки в промежуточных узлах сетки, она равна

$$\left\|u^{num} - u^{exact}\right\|_C = \max_{i=1,n_1}\left|u_i^{num} - u_i^{exact}\right| = 1.776\text{E-}015, x_i = a + h\cdot(i-1/2), i = \overline{1,n_1}.$$

Значения нормы невязки задачи показывают, что функциональное решение (3) имеет двойную точность, – дает 15 верных значащих цифр в решении (табл. 1).

Пример 2.

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x+s} y(s)ds = e^x. \qquad (12)$$

С точным решением $y(x) = \dfrac{4}{5-e^2}e^x$. Выполним проверку:

$$\frac{4}{5-e^2}e^x - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x+s}\left(\frac{4}{5-e^2}\right)e^s ds = e^x \Leftrightarrow \frac{4}{5-e^2} - \frac{2}{5-e^2}\left(\frac{e^2-1}{2}\right) = \frac{5-e^2}{5-e^2} = 1 = 1.$$

Применим алгоритм (2)–(9) к примеру (12), получим

$\lambda = 1/2,\ K(x,s) = e^{x+s},\ f(x) = e^{x}, a = 0, b = 1, c = 1/2, K_x^{(i)}(c,s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(1/2,s) = e^{1/2+s}$.

Бесконечная норма матрицы C, вычисленная программой с числом базисных функций $n = 20$, равна

$\|C\|_\infty = 3.39714811032309$, $|\lambda|\|C\|_\infty = (1/2)3.39714811032309 = 1.69857405516155 > 1$.

Поэтому достаточные условия в теоремах 2, 3, 4 не выполнены, и теоремы 2, 3, 4 к примеру 2 не применимы.

Таблица 2. *Численное и точное решение примера (11). Число базисных функций n=20, число интервалов* $n_1 = 30$ *в квадратурной формуле (9)*

x	u^{num}	u^{exact}	$u^{num} - u^{exact}$
0.000000000000000E+000	-1.67430141208924	-1.67430141208924	2.2204460492E-016
0.100000000000000	-1.85038922873402	-1.85038922873402	0.0000000000E+000
0.200000000000000	-2.04499636271726	-2.04499636271727	1.3322676295E-015
0.300000000000000	-2.26007050764560	-2.26007050764560	8.8817841970E-016
0.400000000000000	-2.49776419785038	-2.49776419785038	4.4408920985E-016
0.500000000000000	-2.76045635167479	-2.76045635167479	4.4408920985E-016
0.600000000000000	-3.05077608048818	-3.05077608048818	4.4408920985E-016
0.700000000000000	-3.37162900171635	-3.37162900171635	8.8817841970E-016
0.800000000000000	-3.72622631923734	-3.72622631923734	4.4408920985E-016
0.900000000000000	-4.11811696218917	-4.11811696218917	0.0000000000E+000
1.00000000000000	-4.55122310384550	-4.55122310384550	8.881784197E-016

С нормой Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы $\left\|u^{num} - u^{exact}\right\|_C = \max\limits_{i=0,n_1}\left|u_i^{num} - u_i^{exact}\right| = 1.3322\mathrm{E}\text{-}015, x_i = a + h\cdot i, i = \overline{0,n_1}$.

Пример 3.

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(x+s)y(s)ds = \sin x + \cos x. \tag{13}$$

С точным решением $y(x) = \dfrac{4}{4-\pi}\left(\sin x + \cos x\right)$. Выполним проверку:

$$\frac{4}{4-\pi}\left(\sin x + \cos x\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(x+s)\frac{4}{4-\pi}\left(\sin s + \cos s\right)ds = \frac{4}{4-\pi}\left(\sin x + \cos x\right) -$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin x\cos s + \cos x\sin s)\left(\frac{4}{4-\pi}\right)\left(\sin s + \cos s\right)ds = \frac{4}{4-\pi}\left(\sin x + \cos x\right) - \frac{2}{4-\pi}\left(\sin x + \cos x\right)\frac{\pi}{2} =$$

$$= \left(\frac{4-\pi}{4-\pi}\right)\left(\sin x + \cos x\right) = \sin x + \cos x\ .$$

Применим алгоритм (2)–(9) к примеру 3, получим

$$\lambda = 1/2,\ K(x,s) = \sin(x+s),\ f(x) = \sin x + \cos x, a = 0, b = \pi,$$

$$c = \pi/2, K_x^{(i)}(c,s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(\pi/2, s) = \sin\left(s + (i+1)\frac{\pi}{2}\right),\ i = \overline{0,n}, s \in [0,\pi].$$

Бесконечная норма матрицы C, вычисленная программой с числом базисных функций $n = 20$, в примере 3 равна

$$\|C\|_\infty = 1528.89560494716,\ |\lambda|\|C\|_\infty = (1/2)1528.89560494716 = 764.447802473580 > 1.$$

Поэтому достаточные условия в теоремах 2, 3, 4 не выполнены, и теоремы 2, 3, 4 к примеру 3 не применимы.

Таблица 3. *Численное и точное решение примера (12). Число базисных функций n=20, число интервалов* $n_1 = 30$ *в квадратурной формуле (9)*

x	u^{num}	u^{exact}	$u^{num} - u^{exact}$
0.000000000000000E+000	4.65979236632548	4.65979236632549	-2.66453525E-015
0.314159265358979	5.87168092602949	5.87168092602949	-2.66453525E-015
0.628318530717959	6.50880844628713	6.50880844628714	-3.55271367E-015
0.942477796076938	6.50880844628713	6.50880844628714	-1.77635683E-015
1.25663706143592	5.87168092602949	5.87168092602949	-1.77635683E-015
1.57079632679490	4.65979236632549	4.65979236632549	0.0000000000E+000
1.88495559215388	2.99177086312304	2.99177086312304	-8.881784197E-016
2.19911485751286	1.03089398294480	1.03089398294480	8.8817841970E-016
2.51327412287183	-1.03089398294480	-1.03089398294480	1.11022302E-015
2.82743338823081	-2.99177086312304	-2.99177086312304	0.000000000000E+000
3.14159265358979	-4.65979236632548	-4.65979236632549	1.776356839400E-015

С нормой Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы

$$\left\|u^{num} - u^{exact}\right\|_C = \max_{i=0,n_1}\left|u_i^{num} - u_i^{exact}\right| = 1.7763\mathrm{E}\text{-}015, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}.$$

Результаты

Впервые предложен модифицированный метод вырождения ядра для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Идея метода заключается в разложении интегрального ядра по переменной x в ряд Тейлора в середине отрезка интегрирования. Для метода доказаны три теоремы – достаточные условия корректности алгоритма (2)–(7) с оценкой нормы обратной матрицы в формуле (7). Кроме того, определена факториальная норма Чебышева вектор-функции. Впервые получено достаточное условие (10), связывающее факториальную норму системы функций из частных производных интегрального ядра с параметром λ.

Алгоритм (2)–(7) тестировался для трех примеров, в которых интегральное ядро имеет экспоненциальную особенность или периодическую смену знака.

Список источников

1. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. 240 с.
2. *Бурова И. Г., Алцыбеев Г. О.* Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2025. Вып. 2(26). С. 175–191. DOI: 10.26089/NumMet.v26r213. EDN: OTOUPI.
3. *Соловьева С. А.* О специальном варианте метода подобластей решения интегральных уравнения Фредгольма второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2018. Вып. 3(19). С. 230–234. DOI: 10.26089/NumMet.v19r322. EDN: YRJNJJ.
4. *Соловьева С. А.* Об одном варианте метода коллокации для интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2017. Вып. (2)18. С. 187–191. DOI: 10.26089/NumMet.v18r216. EDN: OEIFHU.
5. *Гермидер О. В., Попов В. Н.* О методе коллокации при построении решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2024. Вып. 50. С. 19–35. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.50.19. EDN: DGBYUE.
6. *Junghanns P., Roch St., Silbermann B.* Методы коллокации для решения систем сингулярных интегральных уравнений Коши на отрезке // Computational Technologies. 2001. Vol. 1(6). P. 88–124.
7. *Давыдов А. А., Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* О решениях одной системы нелинейных интегральных уравнений типа свёртки на всей числовой прямой // Дифференциальные уравнения. 2023. Вып. 11(59). С. 1500–1514. DOI: 10.31857/S0374064123110055. EDN: PDZECG.
8. *Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К. и др.* Обобщение метода Петрова–Галеркина для решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 5–14. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14. EDN: KQEIXG.
9. *Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К. и др.* Решение интегральных уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 4(59). С. 9–17. DOI 10/17072/1993-0550-2022-4-9-17.
10. *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.* Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.
11. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы: учеб. пособие для студ. физ.-мат. специальностей вузов // М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.

References

1. Bakhvalov, N. S., Lapin, A. V. and Chizhonkov E. V. (2010), *Numerical methods in problems and exercises*, Binom, lab. Knowledge, Russia.

2. Burova, I. G. and Altsybeev, G.O. (2025), "The use of second-order Halsoths to solve integral equations of the second kind", *Computational methods and programming,* no 2(26), pp. 175−191, DOI 10. 26089/NumMet. v26r213.
3. Solovyova, S. A. (2018), "On the special version of the method of resolving the integrated equations of Fredgolm of the second kind", *Computational methods and programming*, no. 3(19), pp. 230−234, DOI 10.26089/nummet.v19r322.
4. Solovyova, S. A. (2017), "On one version of the collocation method for the integrated equations of Fredgolm of the second kind", *Computational methods and programming*, no. 2(18), pp. 187−191, DOI 10.26089/nummet.v18r216.
5. Hermider, O. V. and Popov, V. N. (2024), "On the method of collocation when constructing a solution to the integral equation of Voltaire's second kind using polynomials of Chebyshev and Lyandra", *Izvestia of the Irkutsk State University. Series: Mathematics,* no. 50, pp. 19−35, DOI 10.26516/1997-7670.2024.50.19.
6. Junghanns, P., Roch, St. and Silbermann, B. (2001), "Collocation methods to solve the systems of the singular integral equations of the cat on the segment", *Computation Technologies*, vol. 1(6), pp. 88−124.
7. Davydov, A. A., Khachatryan, H. A. and Petrosyan, A. S. (2023), "On the solutions of one system of non -linear integrated equations such as a soften throughout the numerical direct", *Differential equations*, vol. 11(59), pp. 1500−1514, DOI 10.31857/S0374064123110055.
8. Volosova, N .K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. [et al.]. (2023), "Generalization of the Petrov-Galekin method to solve the system of integrated equations of Fredgolm of the second kind", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, vol. 1 (60), pp. 5-14, DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14.
9. Volosova, N. K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. [et al.]. (2022), "The solution of the integral equations of Fredgolm by replacing the integrated square with the twelfth order of the error in the matrix form", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, vol. 4(59), pp. 9−17, DOI 10/17072/1993-0550-2022-4-9-17.
10. Volkov Yu. S. and Miroshnichenko V. L. (2009), "Assessments of the norms of matrices, opposite to matrices of a monotonous kind and quite non -negative matrices", *Siberian mathematical journal*, vol. 6(50), pp. 1248−1254.
11. Bahvalov, N.S., Zhidkov, N.P. and Kobelkov, G.M. (2011), *Numerical methods* [a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions], Binom, lab. Knowledge, Russia.

Информация об авторах:
Д. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), AuthorID: 405101;
Ю. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), AuthorID: 405109.

Information about the authors:
D. F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), AuthorID: 405101;
Yu. F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), AuthorID: 405109.