Научная статья
УДК 517.968.73:537.8
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-15-30
https://elibrary.ru/dtmrpk

Система интегро-дифференциальных уравнений электродинамики для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле под диэлектрическим слоем

Сергей Владимирович Марвин
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
s.v.marvin@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена начально-краевая задача для системы уравнений электродинамики в квазистационарном приближении применительно к немагнитному проводящему телу, находящемуся под слоем диэлектрика. Предполагается, что проводник и диэлектрик могут быть неоднородными по своим, соответственно, проводящим и диэлектрическим свойствам. Электромагнитное поле создается сторонним током, протекающим в ограниченной области, располагающейся в среде, внешней по отношению к проводнику и диэлектрическому слою; внешняя среда не обладает никакими электрическими и магнитными свойствами. На границах раздела сред предполагаются выполненными обычные условия сопряжения: тангенциальные компоненты напряженностей должны быть непрерывны; кроме того, на границах непроводящих сред должна быть непрерывна нормальная компонента электрической индукции. Начально-краевая задача рассмотрена в классической постановке: напряженности электрического и магнитного поля предполагаются гладкими функциями, удовлетворяющими уравнениям и граничным условиям в обычном (не обобщенном) смысле. При выполнении определенных условий, касающихся связности областей, занятых проводником, диэлектриком и сторонним током, а также гладкости границ этих областей, доказана единственность решения поставленной начально-краевой задачи. Также выполнен вывод системы интегро-дифференциальных уравнений, равносильной исследуемой начально-краевой задаче; ядра интегральных операторов этой системы имеют слабую особенность. Полученные результаты актуальны для задач вихретоковой дефектоскопии и толщинометрии.

Ключевые слова: *начальные условия; условия сопряжения; уравнения Максвелла; квазистационарное приближение; асимптотика; интегральный оператор; объемный потенциал; потенциал простого слоя.*

Для цитирования: Марвин С. В. Система интегро-дифференциальных уравнений электродинамики для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле под диэлектрическим слоем // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 15–30. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-15-30. https://elibrary.ru/dtmrpk.

Статья поступила в редакцию 07.07.2025; одобрена после рецензирования 08.09.2025; принята к публикации 26.09.2025.

Research article

An Integro-Differential Equations System for a Quasi-Stationary Electromagnetic Field in a Nonmagnetic Conductive Body Under a Dielectric Layer

Sergey S. Marvin

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia
s.v.marvin@yandex.ru

Abstract. An initial-boundary value problem for a system of the equations of electrodynamics in a quasi-stationary approximation is considered for the case of a nonmagnetic conductive body, which is covered with a dielectric layer. It is assumed, that the conductor and the dielectric can be inhomogeneous in their conductive and dielectric properties, respectively. An electromagnetic field is induced by an external current, flowing in a limited area, located in a media, which external to the conductor and the dielectric layer; the external media has not any electrical and magnetic properties. At the boundaries of media, the usual conditions of conjugation must be satisfied: the tangential components of the tensions must be continuous; in addition, the normal component of the electrical induction must be continuous at the boundaries between non-conductive media. The initial-boundary value problem is considered in the classical formulation: the tensions of the electric and magnetic fields mast be smooth functions, that satisfy equations and boundary conditions in the usual (not generalized) sense. Under certain assumption about the connectivity of the region with conductor, dielectric and foreign current, as well as the smoothness of the boundaries of these regions, the uniqueness of solution for the considered initial-boundary value problem is proved. Also a system of integro-differential equations, which equivalent to the considered initial-boundary value problem, is derived; kernels of integral operators in this system have a weak singularity. The results are interest for the problems of eddy current flaw detection and thickness measurement.

Keywords: *initial condition; conjugation conditions; Maxwell's equations; quasi-stationary approximation; asymptotic; integral operator; volume potential; simple layer potential.*

For citation: Marvin, S. V. (2025), "An Integro-Differential Equations System for a Quasi-Stationary Electromagnetic Field in a Nonmagnetic Conductive Body Under a Dielectric Layer", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 15−30, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-15-30, https://elibrary.ru/dtmrpk.

The article was submitted 07.07.2025; approved after reviewing 08.09.2025; accepted for publication 26.09.2025.

Введение

Начально-краевые задачи электродинамики применительно к проводящим телам, а также к различным пространственным комбинациям проводников и изоляторов, имеют существенное прикладное значение для описания нестационарных процессов в радиотехнике, электротехнике и неразрушающем контроле. Уравнения электродинамики в интегро-дифференциальной форме более удобны, чем обычные, дифференциальные уравнения Максвелла. На интегро-дифференциальные уравнения распространяются теоремы общего характера о существовании и единственности решения, а также о сходимости различных численных методов, доказанные для широкого класса интегральных уравнений. В интегро-дифференциальных уравнениях условия сопряжения на границе раздела сред оказываются учтенными автоматически; поэтому при решении интегро-дифференциальных уравнений исчезает необходимость отдельного согласования решений в двух пространственных областях с общей границей. Кроме того, если интегро-дифференциальные уравнения составлены для какого-либо ограниченного рассеивающего тела, располагающегося в неограниченной однородной среде, то достаточно решить интегро-дифференциальные уравнения для области, занятой рассеивающим телом, и для ее границы: поле снаружи рассеивающего тела вычисляется непосредственным интегрированием по объему тела и его поверхности. Эти обстоятельства указывают на актуальность вывода и исследования интегро-дифференциальных уравнений электродинамики для различных комбинаций проводников и диэлектриков.

Ранее были получены и исследованы интегро-дифференциальные уравнения электродинамики для нестационарного электромагнитного поля в неферромагнитном проводнике [1–4]. Однако вывод этих уравнений не предполагал квазистационарность, типичную для вихретоковых методов неразрушающего контроля. Кроме того, были получены и в различных аспектах исследованы интегро-дифференциальные уравнения для квазистационарного электромагнитного поля в однородном проводнике [5], в бездефектном проводнике [6], в тонких проводящих оболочках [7–10], а также в объемном проводнике, содержащем дефект в виде полости [11]. Однако для вихретоковой толщинометрии не меньший интерес представляет собой случай неферромагнитного проводника, находящегося под диэлектрическим слоем – в представленной работе получена соответствующая система интегро-дифференциальных уравнений.

1. Постановка начально-краевой задачи

Предположим, что проводящее тело вместе с покрывающим его диэлектрическим слоем занимает ограниченную область Ω_1 в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$; само по себе проводящее тело, без диэлектрика, занимает ограниченную область Ω; $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$ (здесь и далее черта сверху над обозначением множества означает замыкание этого множества; границу точечного множества будем обозначать символом ∂ перед обозначением множества). Ненулевой сторонний ток занимает область T; $\overline{T} \cap \overline{\Omega}_1 = \emptyset$. $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1$ и ∂T представляют собой поверхности Ляпунова; $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ гомеоморфны сфере, ∂T гомеоморфна тору. Область $\mathbb{R}^3 \backslash (\overline{T} \cup \overline{\Omega}_1)$ коротко обозначим, как Ω_0 (рис. 1).

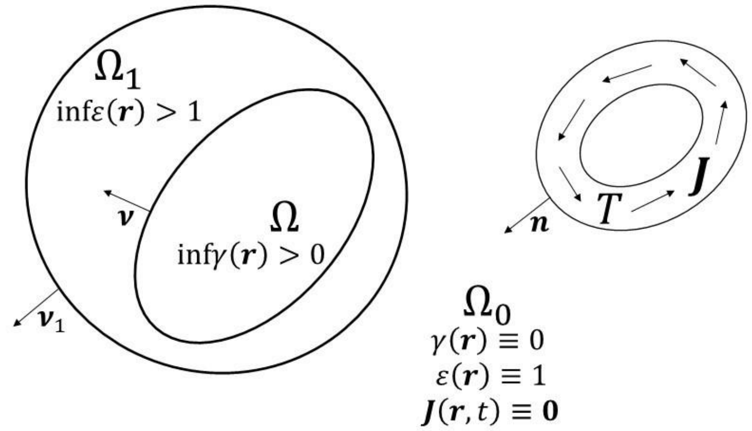

Рис. 1. *Взаимное расположение проводника с диэлектрическим слоем и области стороннего тока*

Также будем предполагать, что удельная электропроводность γ проводника и относительная диэлектрическая проницаемость ε диэлектрического слоя не зависят от времени t, но могут зависеть от пространственных координат $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Функция $\gamma(\boldsymbol{r})$ непрерывно дифференцируема в Ω и вместе со своими частными производными допускает непрерывное продолжение на $\partial\Omega$. Функция $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ непрерывно дифференцируема в $\Omega_1 \backslash \overline{\Omega}$ и вместе со своими частными производными допускает непрерывное продолжение на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$. Кроме того, $\inf\gamma(\boldsymbol{r}) > \boldsymbol{0}$ на Ω и $\inf\varepsilon(\boldsymbol{r}) > \boldsymbol{1}$ на $\Omega_1 \backslash \overline{\Omega}$ (то есть, с учетом всех возможных продолжений $\gamma(\boldsymbol{r})$ и $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ на границы областей, проводник нигде не теряет своих проводящих свойств, а диэлектрик – своих поляризационных свойств). Будем считать, что среда, внешняя по отношению к проводнику с диэлектрическим слоем, не обладает проводящими и поляризационными свойствами: $\gamma(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ и $\varepsilon(\boldsymbol{r}) \equiv 1$ (см. рис 1). Кроме того, тела и среды, фигурирующие в задаче, не обладают магнитными свойствами (то есть, относительная магнитная проницаемость равна 1 во всем пространстве).

Будем предполагать, что плотность стороннего тока $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ является векторной функцией, при любом $t \in [0, +\infty)$ непрерывно дифференцируемой в $\overline{T}$ по пространственным координатам. Также предположим, что при $t \in [0, +\infty)$ функция $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ дифференцируема по времени относительно равномерной нормы в $\overline{T}$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}, t) \right\|_\infty = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\max_{\boldsymbol{r} \in \overline{T}} \left| \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}, t) \right| \right) = 0,$$

где точка над функцией обозначает производную по времени. Заметим, что такой характер дифференцируемости имеет место, если, например, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных $(\boldsymbol{r}, t)$ при $\boldsymbol{r} \in \overline{T}$ и $t \in [0, +\infty)$.

Кроме того, $\mathrm{div}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) \equiv 0$ в T и $J_n = 0$ на ∂T ($\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к ∂T; вектором, фигурирующим в индексе, обозначается проекция на его направление). В точках, внешних по отношению к T, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{0}$ – обозначение нулевого вектора).

Неизвестными в рассматриваемой начально-краевой задаче являются напряженности электрического и магнитного поля: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$, соответственно. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ удовлетворяют системе уравнений Максвелла в квазистационарном приближении. Определим функциональные классы для постановки задачи.

Так как во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ отсутствуют какие-либо магнетики, силовые линии магнитного поля не испытывают никаких преломлений [12]. То есть, $\boldsymbol{H}$ как функция пространственных координат непрерывна во всем $\mathbb{R}^3$ – это обстоятельство, по существу, является граничным условием для $\boldsymbol{H}$ на всех поверхностях раздела в рассматриваемой начально-краевой задаче. Производные $\boldsymbol{H}$ по пространственным координатам могут терпеть разрывы только на границе токовых областей [6]. Помимо стороннего тока в области T, ток проводимости (вихревой ток) также индуцируется в области $\Omega -$ его плотность равна $\gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$. Следовательно, в постановке задачи будем предполагать, что $\boldsymbol{H}$ является непрерывно дифференцируемой векторной функцией пространственных координат в Ω, $\mathbb{R}^3 \backslash (\overline{T} \cup \overline{\Omega})$ и T. В перечисленных областях [12]:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0 \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)' \end{cases} \tag{1.1}$$

где учтено, что $\gamma(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ в точках, внешних по отношению к Ω, а $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \boldsymbol{0}$ в точках, внешних по отношению к T. Также в системе уравнений (1.1) учтено, что в предположениях квазистационарного приближения магнитное поле может создаваться исключительно токами проводимости: токи смещения пренебрежимо малы [12].

Напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$, создаваемого переменным током в области

T, при отсутствии рассеивающих тел в пространстве выражается по известным формулам через объемный векторный потенциал от $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ – это напряженность первичного электрического поля [6]; она представляет собой непрерывно дифференцируемую в $\mathbb{R}^3$ векторную функцию пространственных координат. Появление проводящего тела с диэлектрическим слоем в Ω_1 равносильно наличию объемных вторичных источников поля в Ω и $\Omega_1\backslash\overline{\Omega}$, а также поверхностных вторичных источников на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ – последние могут привести к нарушению непрерывности $\boldsymbol{E}$ [6]. То есть, только на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ следует допускать появление разрывов у $\boldsymbol{E}$ (разрывов, которые не распространяются с течением времени на другие точки пространства, так как в квазистационарном приближении отсутствует явление распространения электромагнитного поля, отсутствуют электромагнитные волны). Таким образом, $\boldsymbol{E}$ как функция пространственных координат должна быть непрерывно дифференцируемой в Ω, $\Omega_1\backslash\overline{\Omega}$ и $\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}_1$, а также непрерывно продолжаемой на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ изнутри и снаружи; но для каждой из указанных поверхностей результаты непрерывных продолжений изнутри и снаружи могут оказаться разными.

В областях $\Omega_1\backslash\overline{\Omega}$ и $\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}_1$ напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет следующей системе уравнений [12]:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_0\dot{\boldsymbol{H}} \end{cases}, \tag{1.2}$$

где учтено, что $\varepsilon(\boldsymbol{r}) \equiv 1$ в точках, внешних по отношению к Ω_1; μ_0 – магнитная постоянная.

Для проводящей области Ω в уравнении с дивергенцией нет необходимости: оно непосредственно вытекает из уравнения для ротора $\boldsymbol{H}$ в (1.1). Поэтому из всех уравнений для $\boldsymbol{E}$ применительно к области Ω остается только то уравнение, которое содержит ротор $\boldsymbol{E}$ [5]:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_0\dot{\boldsymbol{H}}. \tag{1.3}$$

На $\partial\Omega_1$, как на границе двух непроводящих сред, должны быть выполнены следующие условия сопряжения [12]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\text{int}}E_{\nu_1,\text{int}} = E_{\nu_1,\text{ext}} \\ [\boldsymbol{E}_{\text{int}} \times \boldsymbol{\nu}_1] = [\boldsymbol{E}_{\text{ext}} \times \boldsymbol{\nu}_1] \end{cases}, \tag{1.4}$$

где "int" и "ext" − обозначение, соответственно, пределов изнутри и снаружи; $\boldsymbol{\nu}_1$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_1$. Первое условие в (1.4) означает непрерывность нормальных компонент индукции электрического поля, второе – непрерывность касательных компонент напряженности электрического поля при пересечении $\partial\Omega_1$.

На $\partial\Omega_1$, как на границе проводника и диэлектрика, должно быть выполнено только условие непрерывности касательной составляющей напряженности [5]:

$$[\boldsymbol{E}_{\text{int}} \times \boldsymbol{\nu}] = [\boldsymbol{E}_{\text{ext}} \times \boldsymbol{\nu}], \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Кроме того, поверхность раздела проводника и диэлектрика предполагается электронейтральной, что приводит к следующему интегральному равенству для $\boldsymbol{E}$ [5, 12]:

$$\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})E_{\nu,\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)\,dS = 0, \tag{1.6}$$

где dS – элемент площади.

На бесконечности $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ должны иметь следующую асимптотику [11, 12]:

$$\begin{cases} E = O(1/r^2), r \to +\infty \\ H = O(1/r^2), r \to +\infty \end{cases}. \tag{1.7}$$

Наибольший интерес для практики представляет распределение в пространстве и динамика $\boldsymbol{E}$, а не $\boldsymbol{H}$: электрическое поле внутри проводника определяет глубину проникновения вихревых токов; поле снаружи проводника определяет ток, создаваемый на измерительном витке. Поэтому из начально-краевой задачи электродинамики принято различными способами $\boldsymbol{H}$ исключать, и сводить задачу к нахождению $\boldsymbol{E}$ [13]. Это приводит к дифференцированию $\boldsymbol{E}$ по времени, но только в объеме проводника (то есть, в области Ω). Поэтому, несмотря на то обстоятельство, что в изначальной системе уравнений для квазистационарного приближения фигурирует $\dot{\boldsymbol{H}}$, в постановке задачи потребуем дифференцируемость по времени только от $\boldsymbol{E}$, причем только в Ω, и начальные условия поставим только для $\boldsymbol{E}$ в Ω: ниже будет показано, что это гарантирует и дифференцируемость $\boldsymbol{H}$ по времени, и единственность решения рассматриваемой начально-краевой задачи.

Будем предполагать, что при $t \in [0, +\infty)$ $\boldsymbol{E}$ должна быть непрерывно дифференцируема по времени относительно равномерной нормы в $\overline{\Omega}$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t+\Delta t) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t) \right\|_\infty = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sup_{\boldsymbol{r} \in \Omega} \left| \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t+\Delta t) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t) \right| \right) = 0,$$

где использовано обозначение точной верхней грани, а не максимума, потому что на $\partial\Omega$ напряженность $\boldsymbol{E}$, строго говоря, не определена: она допускает непрерывное продолжение на $\partial\Omega$ изнутри области, но также допускает продолжение и снаружи – ни одно из этих продолжений не является определяющим для $\boldsymbol{E}$ на $\partial\Omega$.

Кроме того, как было отмечено выше, в Ω должны быть заданы начальные условия для $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{E_0}(\boldsymbol{r}). \tag{1.8}$$

Из второго уравнения (1.1) получается, как следствие, условие соленоидальности плотности вихревого тока в Ω:

$$\operatorname{div}(\gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}) = 0. \tag{1.9}$$

Также из второго уравнения (1.1) и условия непрерывности $\boldsymbol{H}$ вытекает следующее условие для $\boldsymbol{E}$ на $\partial\Omega$ [5]:

$$E_{\nu,\mathrm{int}} = 0. \tag{1.10}$$

Очевидно, начальные условия (1.8) должны удовлетворять (1.9) и (1.10), чтобы постановка задачи не была внутренне противоречивой.

2. Единственность решения начально-краевой задачи

Докажем, что начально-краевая задача (1.1)–(1.8) в выбранном функциональном классе имеет не более одного решения. Заметим, что при условии непрерывности нормальных компонент $\gamma\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{J}$ на $\partial\Omega$ и ∂T, напряженность $\boldsymbol{H}$, непрерывная во всем пространстве, а также непрерывно дифференцируемая в Ω, $\mathbb{R}^3 \backslash (\overline{T} \cup \overline{\Omega})$ и T, определяется системой уравнений (1.1) и предельным условием (1.7) однозначно, через ротор от объемного векторного потенциала [14]:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \operatorname{rot}\left(\int_\Omega G(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', t)dV' + \int_T G(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t)dV' \right), \tag{2.1}$$

где $G(R) = 1/(4\pi R)$, dV – элемент объема.

Примем следующие обозначения: $\boldsymbol{C}$ − пространство векторных функций, непрерывных на множестве, указанном в скобках после $\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{L}_2$ – пространство векторных полей, квадратично суммируемых на множестве, указанном в скобках после $\boldsymbol{L}_2$.

Лемма 1. *Для любой ограниченной области* Θ *напряженность магнитного поля* $\boldsymbol{H}$, *определяемая равенством (2.1), при* $t \in [0, +\infty)$ *дифференцируема по времени относительно равномерной нормы в* $\overline{\Theta}$. *Кроме того,* $\boldsymbol{H}$ *дифференцируема относительно среднеквадратичной нормы в* $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Производные по пространственным переменным от первого и от второго объемного потенциала в правой части (2.1) представляют собой линейные непрерывные операторы, действующие, соответственно, из $\boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$ в $\boldsymbol{C}(\overline{\Theta})$ и из $\boldsymbol{C}(\overline{T})$ в $\boldsymbol{C}(\overline{\Theta})$ [15]. Тогда таким же свойством непрерывности обладает ротор от суммы этих объемных потенциалов. Следовательно, дифференцируемость $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{J}$ по t относительно равномерной нормы в $\overline{\Omega}$ и $\overline{T}$ влечет за собой дифференцируемость $\boldsymbol{H}$ по t относительно равномерной нормы в $\overline{\Theta}$ (а также перестановочность ротора от интегралов в (2.1) с дифференцированием по времени).

Кроме того, производные по пространственным переменным от объемных потенциалов в (2.1) представляют собой линейные непрерывные операторы, действующие из $\boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^3)$ и из $\boldsymbol{C}(\overline{T})$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^3)$ [15]. Из этого следует, что $\boldsymbol{H}$ дифференцируема по t относительно среднеквадратичной нормы в $\mathbb{R}^3$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Любое решение* $\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\big)$ *начально-краевой задачи (1.1)–(1.8) удовлетворяет следующему равенству:*

$$\frac{\mu_0}{2}\dot{\Big(\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},t)dV\Big)} = -\int_{\Omega} \gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)dV - \int_T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)dV. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из уравнений с роторами в (1.1)–(1.3) следует, что для любого решения рассматриваемой начально-краевой задачи справедливо следующее равенство:

$$\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t) - \\ -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t). \tag{2.3}$$

Проинтегрируем полученное равенство по $\mathbb{R}^3$. Прежде чем проинтегрировать левую часть (2.3), заметим, что интеграл по $\mathbb{R}^3$ от произведения функций определяет скалярное произведение в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^3)$, а $\boldsymbol{H}$, в силу леммы 1, дифференцируемо по времени относительно нормы в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^3)$. Тогда, в силу свойств скалярного произведения,

$$\mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t)dV = \mu_0\langle \boldsymbol{H}(t), \dot{\boldsymbol{H}}(t)\rangle = \frac{\mu_0}{\mathbf{2}}\big(\langle \boldsymbol{H}(t), \dot{\boldsymbol{H}}(t)\rangle + \langle \dot{\boldsymbol{H}}(t), \boldsymbol{H}(t)\rangle\big) = \\ = \frac{\mu_0}{\mathbf{2}}\dot{\langle \boldsymbol{H}(t), \boldsymbol{H}(t)\rangle} = \frac{\mu_0}{\mathbf{2}}\dot{\Big(\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},t)dV\Big)},$$

где треугольными скобками обозначено скалярное произведение в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^3)$.

Интегралы от третьего и четвертого слагаемого в правой части (2.3):

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)dV - \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)dV = \int_{\Omega} \gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)dV - \int_T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)dV,$$

где учтено, в каких областях γ и $\boldsymbol{J}$ могут быть ненулевыми.

Интеграл от первого и второго слагаемого в (2.3) сначала возьмем по шару O_R с центром в начале координат и с радиусом R достаточно большим, чтобы $\overline{\Omega}$ и $\overline{T}$ включались в O_R. Применим теорему Остроградского–Гаусса к областям Ω, T, $\Omega_1\backslash\overline{\Omega}$ и $O_R\backslash(\overline{T} \cup \overline{\Omega}_1)$:

$$\int_{O_R}\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\big)dV = \int_{O_R} \mathrm{div}[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]dV =$$

$$= \oint_{\partial\Omega}[\boldsymbol{H}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)]\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})dS + \oint_{\partial\Omega_1}[\boldsymbol{H}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)]\boldsymbol{\nu}_1(\boldsymbol{r})dS -$$
$$- \oint_{\partial\Omega}[\boldsymbol{H}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)]\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})dS + \oint_{\partial T}[\boldsymbol{H}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)]\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})dS +$$
$$+ \oint_{\partial O_R}[\boldsymbol{H}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}dS - \oint_{\partial\Omega_1}[\boldsymbol{H}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)]\boldsymbol{\nu}_1(\boldsymbol{r})dS -$$
$$- \oint_{\partial T}[\boldsymbol{H}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{E}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)]\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})dS,$$

где $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ − внешняя нормаль к сфере ∂O_R. Теорема Остроградского–Гаусса была применена к нескольким областям. И в знаках перед поверхностными интегралами учтено, что каждый из векторов $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}_1$ и $\boldsymbol{n}$ для одной из этих областей является внешним, и еще для одной − внутренним. В получившемся выражении, в смешанных произведениях под знаками поверхностных интегралов, по существу, участвуют только касательные компоненты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ (перпендикулярные нормальному вектору к поверхности). В силу граничных условий для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, эти компоненты непрерывны при пересечении поверхности. Следовательно, все поверхностные интегралы в полученном выражении, кроме интеграла по ∂O_R, взаимно уничтожаются. Поверхностный интеграл по ∂O_R, в силу условия (1.7), стремится к нулю при $R \to +\infty$.

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\text{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\text{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\big)dV = \boldsymbol{0},$$

из чего следует (2.2). Лемма доказана.

Теорема 1. *Начально-краевая задача (1.1) – (1.8) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Для доказательства единственности решения рассматриваемой начально-краевой задачи необходимо и достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение. В случае однородной начально-краевой задачи $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{0}$ в Ω и для любого $t \in [0,+\infty)$ $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \equiv \boldsymbol{0}$ в T. Тогда, в силу (2.1), $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},0) \equiv \boldsymbol{0}$ в $\mathbb{R}^3$; а в силу (2.2),

$$\frac{\mu_0}{2}\dot{\left(\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},t)dV\right)} = -\int_{\Omega}\gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)dV. \tag{2.4}$$

С учетом знака γ, из полученного равенства следует, что $\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},t)dV$ – невозрастающая функция времени. При этом, $\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},0)dV = 0$. Следовательно, при любом $t \in [0,+\infty)$ $\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},t)dV = 0$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \equiv \boldsymbol{0}$ в $\mathbb{R}^3$.Отсюда, в силу (2.4), в свою очередь следует, что при любом $t \in [0,+\infty)$ $\int_{\Omega}\gamma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)dV = 0$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \equiv \boldsymbol{0}$ в Ω. Осталось доказать, что $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \equiv \boldsymbol{0}$ в областях $\Omega_1\backslash\bar{\Omega}$ и $\mathbb{R}^3\backslash\bar{\Omega}_1$.

В силу (1.2), в указанных областях $\text{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$. Далее в доказательстве теоремы мы не будем указывать зависимость $\boldsymbol{E}$ от t: дифференцирования или интегрирования по времени не будет; при этом, все рассуждения и выводы будут применимы к любому конкретному $t \in [0,+\infty)$. Таким образом, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ можно представить, как $-\text{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ [14], где потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$ дважды непрерывно дифференцируем в $\Omega_1\backslash\bar{\Omega}$ и $\mathbb{R}^3\backslash\bar{\Omega}_1$ и, вместе с производными первого порядка, допускает непрерывное продолжение на $\partial\Omega$ снаружи, а также на $\partial\Omega_1$ изнутри и снаружи.

Потенциал φ в каждой из указанных областей определен с точностью до постоянного слагаемого. С учетом (1.7), первые производные φ на бесконечности имеют асимптотику $O(1/r^2)$; тогда постоянное слагаемое в $\mathbb{R}^3\backslash\bar{\Omega}_1$ можно выбрать так, чтобы сам потенциал φ на бесконечности имел асимптотику $O(1/r)$ – будем считать, что такой выбор постоянного слагаемого выполнен:

$$\varphi = O(1/r), r \to +\infty, \tag{2.5}$$
$$\mathrm{grad}\varphi = O(1/r^2), r \to +\infty. \tag{2.6}$$

Кроме того, в силу (1.4), касательная компонента $\mathrm{grad}\varphi$ непрерывно меняется при пересечении $\partial\Omega_1$. Следовательно, предельные значения потенциала на $\partial\Omega_1$ изнутри и снаружи (то есть, φ_{int} и φ_{ext}) могут отличаться только на постоянную величину − будем считать, что выбор постоянного слагаемого для φ в $\Omega_1 \backslash \bar{\Omega}$ таков, что φ_{int} и φ_{ext} друг другу равны:

$$\varphi_{\mathrm{int}} = \varphi_{\mathrm{ext}}. \tag{2.7}$$

Применим к векторному полю $\varepsilon\varphi\mathrm{grad}\varphi$ в области $O_R \backslash \bar{\Omega}$ теорему Остроградского–Гаусса:

$$\begin{gathered}\int_{O_R \backslash \bar{\Omega}} \mathrm{div}\big(\varepsilon(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r})\big)dV = \oint_{\partial\Omega_1} \varepsilon_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r})\varphi_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\nu_1}dS + \\ - \oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\varphi_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\nu}dS + \oint_{\partial O_R} \varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial r}dS - \oint_{\partial\Omega_1} \varphi_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\nu_1}dS,\end{gathered} \tag{2.8}$$

где учтено, что в точках, внешних по отношению к Ω_1, $\varepsilon(\boldsymbol{r}) \equiv 1$. Интегралы по $\partial\Omega_1$ в полученном выражении взаимно уничтожаются вследствие (1.4) и (2.7):

$$\begin{gathered}\oint_{\partial\Omega_1} \varepsilon_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r})\varphi_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\nu_1}dS - \oint_{\partial\Omega_1} \varphi_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\nu_1}dS = \\ = \oint_{\partial\Omega_1} \varphi_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{r})\big(\varepsilon_{\mathrm{int}}E_{\nu_1,\mathrm{int}} - E_{\nu_1,ext}\big)dS = 0.\end{gathered}$$

В силу (1.5), касательная компонента $\boldsymbol{E}$ непрерывно меняется при пересечении $\partial\Omega$. Однако $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{0}$ в области Ω и $\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi$ в области $\Omega_1 \backslash \bar{\Omega}$. Следовательно, предельное значение касательной компоненты $\mathrm{grad}\varphi$ на $\partial\Omega$ равно нулевому вектору, и φ принимает на $\partial\Omega$ постоянное значение. Тогда, в силу (1.6),

$$\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\varphi_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\nu}dS = \varphi_{\mathrm{ext}}\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\nu}dS = \varphi_{\mathrm{ext}}\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})E_{\nu,\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\,dS = 0.$$

Таким образом, из всех слагаемых в правой части (2.8) остается только интеграл по ∂O_R. С другой стороны, в силу (1.2),

$$\begin{gathered}\mathrm{div}\big(\varepsilon(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r})\big) = \varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{div}\big(\varepsilon(\boldsymbol{r})\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r})\big) + \varepsilon(\boldsymbol{r})\big(\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r})\big)^2 = \\ = -\,\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{div}\big(\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\big) + \varepsilon(\boldsymbol{r})\big(\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r})\big)^2 = \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r}).\end{gathered}$$

Следовательно, равенство (2.8) можно представить в следующем виде:

$$\int_{O_R \backslash \bar{\Omega}} \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})dV = \oint_{\partial O_R} \varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial r}dS.$$

Вследствие (2.5) и (2.6), поверхностный интеграл, получившийся в правой части данного равенства, стремится к нулю при $R \to +\infty$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}} \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})dV = 0$, и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{0}$ в областях $\Omega_1 \backslash \bar{\Omega}$ и $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}_1$. Теорема доказана.

3. Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений

Уравнения с роторами в (1.2) и (1.3), а также выражение для $\boldsymbol{H}$ (2.1), позволяют исключить $\boldsymbol{H}$ из рассматриваемой начально-краевой задачи. Из (1.2), (1.3) и (2.1) следует, что в областях Ω, $\Omega_1 \backslash \bar{\Omega}$ и $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}_1$

$$\mathrm{rot}\Big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\int_{\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' + \mu_0\int_{T} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\dot{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}',t)dV'\Big) = \boldsymbol{0}.$$

Таким образом, в перечисленных областях $\boldsymbol{E}$ допускает следующее представление:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0 \int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' - \mu_0 \int_T G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t)dV' - \\ - \mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{r},t), \qquad (3.1)$$

где потенциал $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ как функция пространственных координат дважды непрерывно дифференцируем в Ω, $\Omega_1\backslash\overline{\Omega}$ и $\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}_1$ и, вместе с производными первого порядка, допускает непрерывное продолжение на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ изнутри и снаружи.

Заметим, что первое и второе слагаемые в правой части (3.1) соленоидальны; докажем это для первого слагаемого:

$$\mathrm{div}\int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \left(\mathrm{div}\int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)dV'\right)^{\boldsymbol{\cdot}}. \qquad (3.2)$$

Воспользуемся (1.9) и (1.10):

$$\mathrm{div}\int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \int_\Omega \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\big(G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\big)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \\ = -\int_\Omega \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}'}\big(G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\big)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \\ = -\int_\Omega \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'}\big(G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\big)dV' + \int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{div}\big(\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\big)dV' = \\ = -\oint_{\partial\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')E_{\nu,\mathrm{int}}(\boldsymbol{r}',t)dS' + \int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{div}\big(\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\big)dV' = 0,$$

что означает равенство нулю производной по времени в (3.2). Доказательство соленоидальности второго слагаемого в (3.1) – аналогичное (только следует воспользоваться соленоидальностью $\boldsymbol{J}$ и равенством нулю J_n на ∂T).

Таким образом, в силу (3.1), $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -\Delta\varphi$. Тогда из (1.9) следует, что в области Ω

$$\Delta\varphi = \mathrm{grad}\gamma(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\gamma(\boldsymbol{r}). \qquad (3.3)$$

Из (1.2) следует, что в области $\Omega_1\backslash\overline{\Omega}$

$$\Delta\varphi = \mathrm{grad}\varepsilon(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\varepsilon(\boldsymbol{r}). \qquad (3.4)$$

Также из (1.2) следует, что в области $\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}_1$

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (3.5)$$

Решение (3.3)–(3.5) следует искать в виде суммы объемных потенциалов от правых частей (3.3) и (3.4) в областях Ω и $\Omega_1\backslash\overline{\Omega}$, а также поверхностных потенциалов простого слоя от вторичных источников, распределенных на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ [6]:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = -\int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\gamma(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\gamma(\boldsymbol{r}')\,dV' - \\ -\int_{\Omega_1\backslash\overline{\Omega}} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\varepsilon(\boldsymbol{r}')\,dV' + \oint_{\partial\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sigma(\boldsymbol{r}',t)dS' + \\ + \oint_{\partial\Omega_1} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sigma_1(\boldsymbol{r}',t)dS',$$

где σ и σ_1 – поверхностные плотности вторичных источников, соответственно, на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$.

Тогда, в силу (3.1),

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0 \int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' - \mu_0 \int_T G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t)dV' + \\ +\mathrm{grad}\int_\Omega G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\gamma(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\gamma(\boldsymbol{r}')\,dV' + \\ +\mathrm{grad}\int_{\Omega_1\backslash\overline{\Omega}} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\varepsilon(\boldsymbol{r}')\,dV' - \\ -\mathrm{grad}\oint_{\partial\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sigma(\boldsymbol{r}',t)dS' - \mathrm{grad}\oint_{\partial\Omega_1} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sigma_1(\boldsymbol{r}',t)dS'. \qquad (3.6)$$

Объемные потенциалы представляют собой функции пространственных координат, непрерывно дифференцируемые во всем пространстве [15]. Поэтому выполнения условий для нормальных компонент в (1.4) и (1.10) можно добиться только за счет поверхностных потенциалов простого слоя. Для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя на $\partial\Omega_1$ выполняются следующие равенства:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu_1}\int_{\partial\Omega_1} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sigma_1(\boldsymbol{r}',t)dS'\right)_{\substack{int\\ ext}} = \int_{\partial\Omega_1}\frac{\partial G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial\nu_1}\sigma_1(\boldsymbol{r},t)dS' \pm \frac{1}{2}\sigma_1(\boldsymbol{r},t),$$

где обозначение нормальной производной за знаком интеграла указывает на ее предельное значение, а под знаком интеграла – на прямое значение. Аналогичные равенства справедливы для нормальной производной потенциала простого слоя на $\partial\Omega$.

Тогда из (3.6) и (1.4) следует, что на $\partial\Omega_1$ должно выполняться следующее уравнение:

$$\begin{gathered}\sigma_1(\boldsymbol{r},t) + \lambda(\boldsymbol{r})\int_{\partial\Omega_1}\frac{\partial G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial\nu_1}\sigma_1(\boldsymbol{r}',t)dS' + \lambda(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial\nu_1}\oint_{\partial\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sigma(\boldsymbol{r}',t)dS' +\\ +\lambda(\boldsymbol{r})\mu_0\int_{\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' + \lambda(\boldsymbol{r})\mu_0\int_{T} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t)dV' -\\ -\lambda(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial\nu_1}\int_{\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\gamma(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\gamma(\boldsymbol{r}')\,dV' -\\ -\lambda(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial\nu_1}\int_{\Omega_1\setminus\bar{\Omega}} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\varepsilon(\boldsymbol{r}')\,dV' = 0,\end{gathered} \tag{3.7}$$

где $\lambda = 2\,(\varepsilon_{\mathrm{int}}-1)/(\varepsilon_{\mathrm{int}}+1)$.

Кроме того, из (3.6) и (1.10) следует, что на $\partial\Omega$ должно выполняться такое уравнение:

$$\begin{gathered}\sigma(\boldsymbol{r},t) + 2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial\nu}\sigma(\boldsymbol{r}',t)dS' + 2\frac{\partial}{\partial\nu}\oint_{\partial\Omega_1} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\sigma_1(\boldsymbol{r}',t)dS' +\\ +2\mu_0\int_{\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' + 2\mu_0\int_{T} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t)dV' -\\ -2\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\gamma(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\gamma(\boldsymbol{r}')\,dV' -\\ -2\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{\Omega_1\setminus\bar{\Omega}} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,\mathrm{grad}\varepsilon(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)/\varepsilon(\boldsymbol{r}')\,dV' = 0.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Условие (1.6) равносильно следующему:

$$\oint_{\partial\Omega}\varepsilon_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r})\sigma(\boldsymbol{r},t)\,dS = 0. \tag{3.9}$$

Заметим, что без условия (3.9) решение σ интегрального уравнение (3.8) определялось бы не однозначно, а с точностью до прибавления любого равновесного распределения вторичных источников на $\partial\Omega$ [16]; условие (3.9) эту неоднозначность устраняет.

Заметим также, что ядра интегро-дифференциальных операторов, используемых в (2.1), (3.6)–(3.8), имеют слабую особенность, что распространяет на них действие теорем, касающихся полной непрерывности [15].

Отдельного обоснования требует то обстоятельство, что для напряженности $\boldsymbol{E}$, удовлетворяющей уравнениям (3.6)–(3.8), выполняется условие на бесконечности из (1.7) (выполнение всех остальных уравнений и условий в (1.1)–(1.7) непосредственно вытекает из свойств объемных и поверхностных потенциалов [15], из проведенных рассуждений). Первое и второе слагаемое в правой части (3.6) представляют собой объемные потенциалы (эти потенциалы – не под градиентом). В общем случае, для объемного потенциала гарантирована только асимптотика $O(1/r)$ при $r\to+\infty$. Тем не менее, для любого решения (3.6)–(3.8) условие на бесконечности (1.7) оказывается выполненным.

Теорема 2. *Если $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ удовлетворяет системе уравнений (3.6)–(3.8) в области Ω, то*

$$\int_{\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' + \int_{T} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t)dV' = O(1/r^2), r \to +\infty.$$

Доказательство. Если напряженность $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ удовлетворяет системе уравнений (3.6)–(3.8), то для нее, как следствие, выполняются условия (1.9) и (1.10): векторная функция $\gamma\boldsymbol{E}$ соленоидальна в Ω; нормальная компонента $\boldsymbol{E}$ на $\partial\Omega$ равна нулю. Аналогичными свойствами обладает $\boldsymbol{J}$ в области T (для $\boldsymbol{J}$ указанные свойства не вытекают из (3.6)–(3.8), а изначально наличествуют в постановке задачи). Примем следующее обозначение:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = \begin{cases} \gamma(\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{r} \in \Omega \\ \boldsymbol{0}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \backslash (\bar{T} \cup \bar{\Omega}). \\ \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t), \boldsymbol{r} \in T \end{cases}$$

Выберем R достаточно большим, чтобы $\bar{\Omega}$ и $\bar{T}$ включались в O_R. Тогда

$$\int_{\Omega} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' + \int_{T} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \int_{O_R} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)dV'.$$

Рассмотрим η-усреднение векторной функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ по Соболеву [15]:

$$\boldsymbol{u}_\eta(\boldsymbol{r},t) = \int_{O_R} \omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}',t)dV',$$

где ω_η – "шапочка" с носителем радиуса η. При любом $t \in [0,+\infty)$ $\boldsymbol{u}_\eta(\boldsymbol{r},t)$ представляет собой бесконечно гладкую векторную функцию пространственных координат; кроме того, при достаточно малых η $\boldsymbol{u}_\eta(\boldsymbol{r},t)$ финитна в O_R. Векторная функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ является пределом в $\boldsymbol{L}_2(O_R)$ от $\boldsymbol{u}_\eta(\boldsymbol{r},t)$ при $\eta \to +0$ [15].

Найдем дивергенцию от $\boldsymbol{u}_\eta(\boldsymbol{r},t)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{u}_\eta(\boldsymbol{r},t) &= \mathrm{div}\int_{O_R} \omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \int_{O_R} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \\ &= \int_{\Omega} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)\gamma(\boldsymbol{r}')\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',t)dV' + \int_{T} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \\ &= \dot{\left(\int_{\Omega} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)dV' + \int_{T} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t)dV'\right)}. \end{aligned}$$

Интегралы-слагаемые, получившиеся под знаком производной по времени, равны нулю. Докажем это для первого интеграла:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)dV' = -\int_{\Omega} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}'}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \\ &= -\int_{\Omega} \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'}\left(\omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\right)dV' + \int_{\Omega} \omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'}\left(\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\right)dV' = \\ &= -\oint_{\partial\Omega} \omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\gamma(\boldsymbol{r}')E_{\nu,\mathrm{int}}(\boldsymbol{r}',t)dS' + \int_{\Omega} \omega_\eta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{div}_{\boldsymbol{r}'}\left(\gamma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\right)dV' = 0. \end{aligned}$$

Для второго интеграла равенство нулю доказывается аналогично.

Таким образом, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ может быть представлена, как предел в $\boldsymbol{L}_2(O_R)$ последовательности бесконечно гладких, соленоидальных и финитных в O_R векторных функций. Из этого следует [17], что $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$, где $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ – векторная функция, квадратично суммируемая в O_R вместе со своими обобщенными производными по Соболеву первого порядка и, кроме того, $[\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)] = \boldsymbol{0}$ на ∂O_R. Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{O_R} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \int_{O_R} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}'}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)dV' = \\ &= \int_{O_R} \mathrm{rot}_{\boldsymbol{r}'}\left(G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)\right)dV' - \int_{O_R}[\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}'}G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)]dV' = \\ &= \oint_{\partial O_R} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)[\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)]dS + \int_{O_R}[\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)]dV' = \\ &= \mathrm{rot}\int_{O_R} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)dV'. \end{aligned}$$

Каждая из компонент ротора представляет собой разность производных первого порядка, а для производных первого порядка от объемного потенциала асимптотика $O(1/r^2)$ гарантирована. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что система интегро-дифференциальных уравнений (2.1), (3.6)–(3.8), дополненная интегральным условием (3.9) и начальными условиями (1.8), эквивалентна начально-краевой задаче (1.1)–(1.8).

Заключение

Представляется актуальным обобщение полученных результатов на ферромагнитные проводящие тела под диэлектрическим слоем, а также на проводящие тела с негладкими границами.

Для вывода интегро-дифференциальных уравнений применительно к случаю дефектного ферромагнитного проводника может быть использован метод, связанный с введением дополнительных вторичных источников на границе раздела сред, обладающих разными магнитными свойствами [5, 6, 18, 19].

Однако также возможно применение иного подхода, не связанного с использованием поверхностных потенциалов [20]. В рамках такого подхода уже были получены объемные интегро-дифференциальные уравнения для постоянного магнитного поля в дефектных магнетиках (причем из магнитостатики на квазистационарный случай многие результаты могут быть перенесены без изменений). Кроме того, были получены конкретные неравенства для норм обратных операторов, разрешающих указанные интегро-дифференциальные уравнения.

Обобщение интегро-дифференциальных уравнений на области с негладкими границами представляется возможным при достаточно подробной классификации точек негладкости, допускаемых в модели: тогда в функциональных классах, выбираемых для постановки задачи, следует указать асимптотическое поведение решения вблизи точек негладкости, определить класс (степень) суммируемости решения [21, 22].

Все перечисленное станет предметом дальнейших исследований.

Список источников

1. *Дякин В. В., Сандовский В. А*. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2008. 390 с. ISBN: 5-7691-1861-X. EDN: QMFYCF.
2. *Марвин С. В*. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 1. С. 105–117. EDN: VVYSAZ.
3. *Марвин С. В*. Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока // Дефектоскопия. 2016. № 2. С. 42–54. EDN: VXMEDV .
4. *Марвин С. В*. Начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в случае неограниченной немагнитной проводящей среды под диэлектрическим слоем // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2017. № 13 (262), вып. 47. С. 5–14. EDN: ZCJDKZ.
5. *Тозони О. В. Маергойз И. Д*. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1974. 352 с.

6. *Тозони О. В.* Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
7. *Кочубей Т. В., Астахов В. И.* Вихревые токи в проводящей пластине с неоднородными анизотропными свойствами // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 8. С. 19–32. EDN: RXPNHT.
8. *Астахов В. И., Елсуков В. С.* О расчете экранирующих оболочек сложных геометрических форм // Известия вузов. Электромеханика. 2013. № 2. С. 3–7. EDN: PZFOSR.
9. *Астахов В. И., Басан С. Н., Данилина Э. М.* О математической модели вихревых токов в оболочках с разрезами // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2017. № 4. С. 13–21. EDN: ZWHBVX.
10. *Астахов В. И., Данилина Э. М.* Сведение задачи расчета вихревых токов в пластине с разрезами к интегральному уравнению // Известия вузов. Электромеханика. 2018. Т. 61, № 6. С. 5–12. DOI: 10.17213/0136-3360-2018-6-5-12. EDN: VNXSNG.
11. *Марвин С. В.* Интегро-дифференциальные уравнения для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле с дефектом // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математика. Механика. Физика". 2024. Т. 16, № 3. С. 38–44. DOI: 10.14529/mmph240306. EDN: WUTYAD.
12. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Физматлит, 2003. 616 с. ISBN: 978-5-9221-0313-8. EDN: RXGSUP.
13. *Петрушенко Е. И.* К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы. Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1966. № 6. С. 59–70.
14. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления М.: Наука, 1965. 427 с.
15. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
16. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953. 415 с.
17. *Быховский Э. Б. Смирнов Н. В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых в заданной области, и операторах векторного анализа // Тр. МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.
18. *Кадников С. Н., Веселова И. Е.* Исследование свойств граничного интегрального уравнения для расчета квазистатического магнитного поля // Вестник ИГЭУ. 2008. Вып. 2. С. 1–7. EDN: PFJMIZ.
19. *Кадников С. Н., Веселова И. Е.* Анализ векторного интегрального уравнения для расчета магнитного поля // Электричество. 2010. № 9. С. 61–65. EDN: LNAZIQ.
20. *Дякин В. В.* Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 404 с.
21. *Головкин М . А.* О некоторых свойствах интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Ученые записки ЦАГИ. 2006. Т. 37, № 4. С. 8–11. EDN: JWLRVJ
22. Мазья В. Г., Поборчий С. В. О представлении решения задачи Неймана в области с пиком гармоническим потенциалом простого слоя // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2009. Вып. 3. С. 41–49. EDN: KYOIHB.

References

1. Dyakin, V. V. and Sandovskii, V. A. (2008), "Zadachi elektrodinamiki v nerazrushaiuschem kontrole" [Electrodynamics problems in the nondestructive testing], IMP UB RAS, Yekaterinburg, Russia, 390 p.
2. Marvin, S. V. (2016), "Existence and the uniqueness of solution of initial-boundary problem for the uniform system of equations of Maxwell in the case of nonferromagnetic defective metallic body", *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika,* no 1, pp. 105–117.
3. Marvin, S. V. (2016), "An initial-boundary value problem of structurescopy of a nonferromagnetic metal solid with foreign dielectric inclusions using the residual field of an in-stantaneously cut-off extraneous current", *Russian journal of nondestructive testing,* vol. 52, no 2, pp. 85–94.
4. Marvin, S. V. (2017), "An initial –boundary value problem for the system of Maxwell's equations in the case of an unlimited nonmagnetic conductive medium under dielectric layer", *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics,* no 13 (262), iss. 47, pp. 5–14.
5. Tozoni, O. V. and Maergoyz, I. D (1974), "Raschet trekhmernikh elektromagnitnikh poley" [Calculation of three-dimensional electromagnetic fields], Tekhnika, Kiev, USSR, 352 p.
6. Tozoni, O. V. (1975), "Metod vtorichnikh istochnikov v elektrotekhnike" [Secondary sources method in the electrical engineering], Energia, Moscow, USSR, 296 p.
7. Kochubey, T. V. and Astakhov, V. I. (2011), "Eddy currents in case of anisotropic inhomogeneous conductive plates", *Mathematical Models and Computer Simulations,* vol. 23, no 8, pp. 19–32.
8. Astakhov, V. I. and Elsukov, V. S. (2013), "About calculation of shielding shells of complex geometric shapes", *Russian Electromechanics*, no 2, pp. 3–7.
9. Astakhov, V. I., Basan, S. N. and Danilina, E. M. (2017), "About mathematical model of eddy current in thin shell with a cuts", *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus region. Technical Sciences*, no 4, pp. 13–21.
10. Astakhov, V. I. and Danilina, E. M. (2018), "Reduction problem of eddy current calculation in the plate with cuts to integral equation", *Russian Electromechanics*, vol. 61, no 6, pp. 5–12.
11. Marvin, S. V. (2024), "Integro-differential equations for a quasi-stationary electromagnetic field in a nonmagnetic conductive body with a defect", *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics",* vol. 16, no 3, pp. 38–44.
12. Tamm, I. E. (2003), "Osnovy teorii elektrichestva" [Fundamentals of electricity theory], Fizmatlit Publ., Moskow, Russia, 616 p.
13. Petrushenko, E. I. (1966), "To the calculation of eddy currents in conductors of complex shapes", *Izvestiya AN SSSR, Energetika i transport,* no. 6, pp. 59–70.
14. Kochin, N. E. (1965), "Vektornoye ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya" [The vector calculus and basics of the tensor calculus], Nauka, Moscow, USSR, 427 p.
15. Mikhlin, S. G. (1977), "Lineynie uravneniya v chastnykh proizvodnykh" [Linear partial differential equations], Vysshaya shkola, Moscow, USSR, 431 p.
16. Gyunter, N. M. (1953), "Teoriya potentciala I ee primenenie v zadachakh matematicheskoy fiziki" [The theory of potential and it's applications in problems of the mathematical physics], GITTL, Moscow, USSR, 415 p.
17. Bykhovskii, E. B. and Smirnov, N. V. (1960), "Orthogonal decomposition of the space of vector function square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis", *Tr. MIAN SSSR.,* vol. 59, pp. 5–36.

18. Kadnikov, S. N. and Veselova, I. E. (2008), "Investigating boundary integral equation for calculating quasistatic magnetic field", *Bulletin of IGEU*, iss. 2. pp. 1–7
19. Kadnikov, S. N. and Veselova, I. E. (2010), "Analysis of vector integral equation for calculation of magnetic field", *Electricity*, no 9. pp. 61–65.
20. Dyakin, V. V. (2016), "Matematicheskie osnovy klassicheskoy magnitostatiki" [Mathematical fundamentals of classical magnetostatics], UB RAS Publ, Yekaterinburg, Russia, 404 p.
21. Golovkin, M. A. (2006), "About some properties of the second kind Fredholm integral equations", *TsAGI Science Journal*, vol. 37, no 4, pp. 8–11.
22. Mazya, V. G. and Poborchii, S. V. (2009), "On representation of the solution of the Neumann problem in a domain with peak by the harmonic simple layer potential", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, vol. 42, iss. 3, pp. 185–193.

Информация об авторе:

С. В. Марвин – кандидат физико-математических наук, доцент департамента информационных технологий и автоматики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина (620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19).

Information about the author:

S. V. Marvin – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of department of information technologies and automation, Ural Federal University named after the first of President of Russia B.N. Yeltsin (19, Mira st., Yekaterinburg, Russian Federation, 620002).