МАТЕМАТИКА

Научная статья
УДК 512.558
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-5-14
https://elibrary.ru/enaghd

Полугруппа всех бинарных отношений на множестве

Евгений Михайлович Вечтомов[1], Арсений Андреевич Мамаев[2]
[1, 2]Вятский государственный университет, г. Киров, Россия
[1]vecht@mail.ru
[2]arseniyxo@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются свойства полугруппы $R(X)$ всех бинарных отношений на непустом множестве X с операцией композиции бинарных отношений. Доказано, что в терминах полугруппы $R(X)$ выражается вся информация о бинарных отношениях на X. Описаны изоморфизмы между полугруппами $R(X)$ и $R(Y)$ для произвольных множеств X и Y. Получена абстрактная характеризация полугрупп $R(X)$.

Ключевые слова: *бинарное отношение; полугруппа бинарных отношений; полугрупповая характеризация.*

Для цитирования: Вечтомов Е. М., Мамаев А. А. Полугруппа всех бинарных отношений на множестве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 5−14. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-5-14. https://elibrary.ru/enaghd.
Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Статья поступила в редакцию 15.06.2025; одобрена после рецензирования 09.08.2025; принята к публикации 24.09.2025.

MATHEMATICS

Research article

The Semigroups of All Binary Relations on Set

Evgeny M. Vechtomov[1], Arseny A. Mamaev[2]
[1, 2]Vyatka State University, Kirov, Russia
[1]vecht@mail.ru
[2]arseniyxo@yandex.ru

Abstract. The article considers the properties of the semigroup $R(X)$ of all binary relations on a non-empty set X with the operation of composition of binary relations. The authors provide a proof that all information about binary relations on X is expressed in terms of the semigroup $R(X)$. They describe isomorphisms between the semigroups $R(X)$ and $R(Y)$ for arbitrary sets X and Y. The paper also gives an abstract characterization of the semigroups $R(X)$.

Keywords: *binary relation; semigroup of binary relations; semigroup characterization.*

For citation: Vechtomov, E. M. and Mamaev, A. A. (2025), "The Semigroups of All Binary Relations on Set", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 5−14, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-5-14, https://elibrary.ru/enaghd.
Acknowledgments: the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00117.

The article was submitted 15.06.2025; approved after reviewing 09.08.2025; accepted for publication 24.09.2025.

Введение

Исследуется полугруппа $R(X)$ всех бинарных отношений на произвольном непустом множестве X относительно операции композиции бинарных отношений.

Полугруппа $S(X)$ преобразований произвольного множества X играет важную роль в современной математике. Хорошо известен аналог теоремы Кэли о группах: любая полугруппа A изоморфна подполугруппе сдвигов полугруппы $S(A\cup\{1\})$. По теореме Шрейера–Мальцева любой изоморфизм полугрупп $S(X)$ и $S(Y)$ порождается биекцией множеств X и Y (см. [1, с. 27]). Если X – топологическое пространство, то через $S(X)$ обозначается полугруппа всех непрерывных преобразований пространства X. Полугруппам $S(X)$ непрерывных преобразований топологических пространств X посвящена большая обзорная статья Мейджила [2]).

Бинарное отношение – одно из центральных понятий теоретико-множественной математики. Систематизация понятий и обозначений теории бинарных отношений дана Риге [3]. История развития понятия бинарного отношения затронута во введении к монографии [4]. Полугруппы $R(X)$ рассматривались разными математиками, в частности В. В. Вагнером [5] в рамках его теории полугрупп частичных преобразований (т. е. однозначных бинарных отношений на множестве). Изучение некоторых алгебраических свойств (делимость, регулярность, главные идеалы) полугрупп $R(X)$ осуществлено в работе К. А. Зарецкого [6]. Полугруппы непрерывных бинарных отношений на топологических пространствах исследовались в работах [7–9].

Целью нашей статьи является доказательство теорем 1–3 о полугруппах бинарных отношений.

1. Методы

1.1. Исходные понятия

Бинарным отношением между множествами A и B называется произвольное подмножество ρ прямого произведения $A\times B=\{(a, b)\colon a\in A,\ b\in B\}$; вместо $(a, b)\in\rho$ будем писать $a\rho b$.

Бинарное отношение между одинаковыми множествами $A=B$ называется *бинарным отношением на множестве A*.

Пусть даны бинарные отношения $\rho\subseteq A\times B$ и $\sigma\subseteq B\times C$.

Важнейшим является понятие *композиции* $\sigma\rho\subseteq A\times C$ бинарных отношений ρ и σ: $\forall a\in A\ \forall c\in C$

$$a(\sigma\rho)c \Leftrightarrow \exists b\in B(a\rho b\ \&\ b\sigma c).$$

Композиция бинарных отношений ассоциативна там, где определена.

Бинарное отношение $\rho^{-1}\subseteq B\times A$, $b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b$, называется *обратным* к отношению $\rho\subseteq A\times B$. Отображение $\rho\to\rho^{-1}$ является биекцией множества всех бинарных отношений между A и B на множество всех бинарных отношений между B и A.

Бинарное отношение ρ на множестве X является подмножеством прямой степени $X^2=X\times X$ и элементом булеана $B(X\times X)$. Отношение равенства на множестве X обозначается 1_X. Пустое отношение будем обозначать, как и пустое множество, через $\varnothing$.

Образом подмножества A множества X при бинарном отношении ρ называется множество $A\rho=\rho(A)=\{b\in Y\colon \exists a\in A\ a\rho b\}\subseteq Y$. *Областью определения* бинарного отношения ρ называется множество $D(\rho)=Y\rho^{-1}=\rho^{-1}(Y)$. *Множеством значений (образом)* бинарного отношения ρ будет множество $R(\rho)=X\rho=D(\rho^{-1})$. Отметим, что для любого бинарного отношения ρ между множествами X и Y

$$\rho=\cup_{a\in X}\left(\{a\}\times\rho(\{a\})\right)=\cup_{b\in Y}\left(\rho^{-1}(\{b\})\times\{b\}\right).$$

Включение $\rho\subseteq\sigma$, объединение $\rho\cup\sigma$ и пересечение $\rho\cap\sigma$ бинарных отношений суть теоретико-множественные включение, объединение и пересечение ρ и σ на булеане $B(X\times Y)$ множества $X\times Y$.

Бинарное отношение ρ между множествами X и Y называется:

всюду определенным, если $D(\rho)=X$ (т. е. $1_X\subseteq\rho\rho^{-1}$);

однозначным, если $\forall a\in X\ \forall b_1, b_2\in Y\ (a\rho b_1\ \&\ a\rho b_2\Rightarrow b_1=b_2)$ $(\rho^{-1}\rho\subseteq 1_Y)$;

инъективным, если $\forall a_1, a_2\in X\ \forall b\in Y\ (a_1\rho b\ \&\ a_2\rho b\Rightarrow a_1=a_2)$ $(\rho\rho^{-1}\subseteq 1_X)$;

сюръективным, когда $R(\rho)=Y$, т. е. $1_Y\subseteq\rho^{-1}\rho$;

биективным (*биекцией* или *взаимно однозначным соответствием*), когда оно всюду определено, однозначно, инъективно и сюръективно ($\rho\rho^{-1}=1_X$ и $\rho^{-1}\rho=1_Y$).

Всюду определенное однозначное бинарное отношение между множествами X и Y называется *функциональным*, *функцией* или *отображением* ($X\to Y$).

Всюду определенные бинарные отношения называют также *многозначными функциями*, а однозначные бинарные отношения – *частичными функциями*. Отображения множества в себя называются еще *преобразованиями* этого множества.

Для любого бинарного отношения ρ между A и B имеем:

ρ всюду определено $\Leftrightarrow\rho^{-1}$ сюръективно;

ρ однозначно $\Leftrightarrow\rho^{-1}$ инъективно.

1.2. Арифметика бинарных отношений

Пусть даны произвольные бинарные отношения ρ, σ, θ между множествами X и Y, бинарные отношения τ, υ между множествами Y и Z, бинарное отношение ω между множествами Z и U.

Легко видеть, что для указанных бинарных отношений и любых множеств $A, B\subseteq X$ верна

Лемма 1. *Имеют место следующие свойства бинарных отношений:*

1) $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$, $\rho\subseteq\rho\rho^{-1}\rho$;

2) $(\rho\tau)^{-1}=\tau^{-1}\rho^{-1}$;

3) $(\rho\tau)\omega=\rho(\tau\omega)$;

4) $1_X\cdot\rho=\rho$, $\rho\cdot 1_Y=\rho$, $\varnothing\cdot\rho=\rho\cdot\varnothing=\varnothing$;

5) $\rho\cup\sigma=\sigma\Leftrightarrow\rho\subseteq\sigma\Leftrightarrow\rho^{-1}\subseteq\sigma^{-1}$;

6) $(\rho\subseteq\sigma\ \&\ \tau\subseteq\upsilon)\Rightarrow\rho\tau\subseteq\sigma\upsilon$;

7) $(\rho\cup\sigma)\cup\theta=\rho\cup(\sigma\cup\theta)$, $\rho\cup\sigma=\sigma\cup\rho$;

8) $\rho\cup\rho=\rho$, $\rho\cup\varnothing=\rho$;

9) $(\rho\cup\sigma)\tau=\rho\tau\cup\sigma\tau$, $\rho(\tau\cup\upsilon)=\rho\tau\cup\rho\upsilon$;

10) $(\rho\cup\sigma)^{-1}=\rho^{-1}\cup\sigma^{-1}$, $(\rho\cap\sigma)^{-1}=\rho^{-1}\cap\sigma^{-1}$;

11) $\rho\subseteq\sigma\Rightarrow\rho\cup\theta\subseteq\sigma\cup\theta$, $\rho\subseteq\sigma\Rightarrow\rho\cap\theta\subseteq\sigma\cap\theta$;

12) $(\rho\cap\sigma)\tau\subseteq\rho\tau\cap\sigma\tau$, $\rho(\tau\cap\upsilon)\subseteq\rho\tau\cap\rho\upsilon$.

13) $(A\cup B)\rho=A\rho\cup B\rho$, $(A\cap B)\rho\subseteq A\rho\cap B\rho$;

14) $A(\rho\cup\sigma)=A\rho\cup A\sigma$, $A(\rho\cap\sigma)\subseteq A\rho\cap A\sigma$;

15) $A(\rho\tau)=(A\rho)\tau$.

Бинарное отношение ρ на множестве X назовем *полным отношением*, если $\rho=D(\rho)\times R(\rho)$. Полными отношениями на непустом множестве X служат *константные отображения* $\pi_x: X\to\{x\}, x\in X$. Константные отображения $\pi_x=X\times\{x\}$ являются минимальными элементами упорядоченного множества всех полных всюду определенных бинарных отношений на X, рассматриваемого с отношением включения $\subseteq$ бинарных отношений.

Любое подмножество A множества X служит областью определения и множеством значений полного бинарного отношения $A\times A\in R(X)$.

Для любого элемента x произвольного непустого множества X положим $\pi^x=(\pi_x)^{-1}=\{x\}\times X$ – *коконстантное отношение* на X. Коконстантные отношения на множестве X также являются полными отношениями на X.

Легко видеть, что имеет место

Лемма 2. *Если a, $b\in X$, то*

$$\pi_a\pi^b=\varnothing\Leftrightarrow a\neq b;\ \pi_a\pi^b=X\times X\neq\varnothing\Leftrightarrow a=b.$$

2. Результаты

2.1. Алгебраические свойства полугруппы *R*(*X*)

Напомним некоторые полугрупповые понятия.

Полугруппой называется непустое множество с определенной на нем одной ассоциативной бинарной операцией. Пусть $S\equiv\langle S,\cdot\rangle$ – произвольная мультипликативно записанная полугруппа. Ассоциативность означает, что на S выполняется тождество $(xy)z=x(yz)$. Как обычно, часто пишем xy вместо $x\cdot y$. Любая полугруппа удовлетворяет обобщенному закону ассоциативности: произведение конечного числа элементов полугруппы, взятых в фиксированном порядке, не зависит от расстановки скобок.

Элемент 1 (элемент 0) полугруппы S называется ее *единицей* (*нулем*), если $1\cdot s=s\cdot 1=s$ $(0\cdot s=s\cdot 0=0)$ для всех $s\in S$.

Полугруппа S называется полугруппой *левых нулей* (*правых нулей*), если S удовлетворяет тождеству $xy=x$ ($xy=y$ соответственно). Элемент e полугруппы S называется *левым нулем* (*правым нулем*) в S, если $es=e$ ($se=e$) для любого элемента $s\in S$.

Левым идеалом полугруппы S называется любое ее непустое подмножество I, для которого $SI=\{si: s\in S, i\in I\}\subseteq I$. Симметричным образом определяется понятие *правого идеала* полугруппы. Подмножество полугруппы называется *идеалом*, если оно является ее левым и правым идеалом одновременно.

Рассмотрим полугруппу S с нулем 0 и ее элемент a. Множество $\mathrm{Ann}_l\, a=\{s\in S: sa=0\}$ – *левый аннулятор* элемента a, множество $\mathrm{Ann}_r\, a=\{s\in S: as=0\}$ – *правый аннулятор* элемента a. Получаем левый идеал $\mathrm{Ann}_l\, a$ и правый идеал $\mathrm{Ann}_r\, a$ в полугруппе S.

Обозначение. Пусть $R(X)$ – полугруппа всех бинарных отношений на непустом множестве X с операцией композиции бинарных отношений. Полугруппа $R(X)$ имеет единицу – тождественное отображение $1=1_X$ множества X и нуль – пустое отношение $\varnothing$. Можно считать также $R(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

Сформулируем некоторые важнейшие свойства полугруппы $R(X)$.

Лемма 3. *Для любых ненулевых бинарных отношений* ρ, $\sigma\in R(X)$ *имеют место следующие соотношения:*

1. $\rho\sigma=\varnothing \Leftrightarrow R(\rho)\cap D(\sigma)=\varnothing$.
2. $D(\rho) \subseteq D(\sigma) \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_l\, \sigma \subseteq \mathrm{Ann}_l\, \rho$.
3. $D(\rho)=D(\sigma) \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_l\, \sigma=\mathrm{Ann}_l\, \rho$.
4. $D(\rho)=X \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_l\, \rho=\{\varnothing\}$.
5. $R(\rho) \subseteq R(\sigma) \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_r\, \sigma \subseteq \mathrm{Ann}_r\, \rho$.
6. $R(\rho)=R(\sigma) \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_r\, \rho=\mathrm{Ann}_r\, \sigma$.
7. $R(\rho)=X \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_r\, \rho=\{\varnothing\}$.

Доказательство. Соотношение 1 вытекает из определений, а остальные соотношения леммы 3 следуют из соотношения 1.

Определение. Будем говорить, что некоторое предложение о бинарных отношениях на непустом множестве X имеет *полугрупповую характеризацию*, если оно выражается на языке полугруппы $R(X)$.

Рассмотрим на множестве $R(X)$ два отношения эквивалентности D и R:

$$\rho \mathrm{D} \sigma \Leftrightarrow D(\rho)=D(\sigma) \text{ и } \rho \mathrm{R} \sigma \Leftrightarrow R(\rho)=R(\sigma) \text{ при всех } \rho, \sigma \in R(X).$$

Зададим на фактор-множестве $R(X)/\mathrm{D}$ отношение порядка $\leq$, полагая

$$[\rho]_{\mathrm{D}} \leq [\sigma]_{\mathrm{D}} \Leftrightarrow D(\rho) \subseteq D(\sigma) \text{ для любых } \rho, \sigma \in R(X).$$

Аналогичным образом определим порядок $\leq$ на фактор-множестве $R(X)/\mathrm{R}$. По лемме 3 порядки $\leq$ на $R(X)/\mathrm{D}$ и на $R(X)/\mathrm{R}$ заданы корректно и упорядоченные множества $\langle R(X)/\mathrm{D}, \leq\rangle$ и $\langle R(X)/\mathrm{R}, \leq\rangle$ имеют полугрупповую характеризацию.

В силу сказанного, упорядоченные множества $\langle R(X)/\mathrm{D}, \leq\rangle$ и $\langle R(X)/\mathrm{R}, \leq\rangle$ изоморфны булеану $\langle B(X), \subseteq\rangle$.

Поэтому, в силу соотношений 4 и 7 леммы 3, верно

Предложение 1. *Бинарные отношения вида* π_a *и* π^a, $a\in X$, *суть в точности всюду определенные бинарные отношения с минимальным множеством значений и сюръективные бинарные отношения с минимальной областью определения, соответственно, т. е. они характеризуются полугруппой* $R(X)$.

Обозначим через $c(X)$ и $coc(X)$ – соответственно – полугруппу всех константных отображений множества X и полугруппу всех коконстантных отношений на множестве X. Заметим, что $c(X)^{-1}=coc(X)$.

Из предложения 1 следует

Предложение 2. *Полугруппы* $c(X)$ *и* $coc(X)$ *допускают полугрупповую характеризацию.*

Предложение 3. *Для любого ненулевого бинарного отношения* $\rho\in R(X)$ *выполняются следующие соотношения:*

1) ρ *– однозначное* $\Leftrightarrow c(X)\rho \subseteq c(X)$*;*

2) ρ *– инъективное* $\Leftrightarrow \rho coc(X) \subseteq coc(X)$*;*

3) ρ *– биекция* $\Leftrightarrow \rho$ *– обратимый элемент полугруппы* $R(X)$.

Доказательство прямо следует из определений указанных понятий.

Замечание 1. Отметим, что предложение 1 играет ключевую роль в полугрупповой характеризации утверждений о бинарных отношениях. В силу предложения 1 можно отождествить элементы a произвольного непустого множества X с константными отображениями $\pi_a\in R(X)$: $a\equiv\pi_a$ для всех $a\in X$; также возможно отождествление $a\equiv\pi^a$. Так, вместо выражения "элементы π_a и π_b полугруппы $R(X)$" допустимо писать "элементы a и b множества X", что доступнее и нагляднее.

Следующие три утверждения очевидны.

Лемма 4. *Для любых* $\rho\in R(X)$ *и* a, $b\in X$ *имеем*

$$a\rho b \Leftrightarrow \pi_a\rho\pi^b \neq \varnothing.$$

Лемма 5. *Для любых* ρ, $\sigma\in R(X)$ *имеем*

$$\rho\subseteq\sigma \Leftrightarrow \forall a, b \in X\ (\pi_a\rho\pi^b \neq \varnothing \Rightarrow \pi_a\sigma\pi^b \neq \varnothing).$$

Лемма 6. *Для любых* a, $b\in X$ *верно равенство* $\pi^a\pi_b=\{(a, b)\}$.

Замечание 2. Лемма 4 показывает, что принадлежность упорядоченной пары (a, b) элементов множества X отношению $\rho\in R(X)$ имеет полугрупповую характеризацию. В свою очередь, лемма 5 дает полугрупповую характеризацию отношению включения $\subseteq$ на множестве $R(X)$. Леммы 5 и 6 также доказывают полугрупповую характеризуемость всякого бинарного отношения ρ на произвольном множестве X.

Принимая во внимание замечание 2, получаем один из основных результатов работы.

Теорема 1. *Для любого непустого множества* X *все элементы, подмножества и подполугруппы полугруппы* $R(X)$ *имеют полугрупповую характеризацию, т. е. определяются в терминах полугруппы* $R(X)$.

Иллюстрацией теоремы 1 служат леммы 2–6 и предложения 1–3.

2.2. Некоторые подполугруппы полугруппы *R*(*X*)

Дадим полугрупповые характеризации для следующих подполугрупп полугруппы $R(X)$:

$DR(X)$ – полугруппа всех всюду определенных бинарных отношений на множестве X;

$IR(X)$ – полугруппа всех сюръективных бинарных отношений на множестве X;

$FDR(X)$ – полугруппа всех всюду определенных полных бинарных отношений на множестве X;

$S(X)$ – полугруппа всех отображений $X\to X$ (преобразований множества X).

Предложение 8. *Для произвольного непустого множества* X *справедливы следующие утверждения:*

(1) $DR(X)=\{\rho\in R(X)\colon \mathrm{Ann}_l\,\rho=\{\varnothing\}\}$;

(2) $IR(X)=\{\rho\in R(X)\colon \mathrm{Ann}_r\,\rho=\{\varnothing\}\}$;

(3) $FDR(X)=\{\rho\in DR(X)\colon DR(X)\rho=\{\rho\}\}$;

(4) $S(X)=\{\rho\in DR(X)\colon c(X)\rho\subseteq c(X)\}$;

(5) $c(X)$ *– это в точности множество всех правых нулей полугруппы* $S(X)$;

(6) $coc(X)$ *– это в точности множество левых нулей полугруппы всех инъективных сюръективных бинарных отношений на множестве* X.

Доказательство. (1) Вытекает из соотношения 4 леммы 3.

(2) Вытекает из соотношения 7 леммы 3.

(3) Ясно, что элементы $\rho\in FDR(X)$ являются правыми нулями полугруппы $DR(X)$. Обратно, предположим, что бинарное отношение $\rho\in DR(X)$ не является полным. Это значит, что найдутся такие элементы $a\in D(\rho)$ и $b\in R(\rho)$, что $\rceil(a\rho b)$. Тогда $\pi_a\rho\neq\rho$, так как $b\notin R(\pi_a\rho)$.

(4) Следует из соотношения 1) предложения 3.

(5) Следует из равенства $c(X)=S(X)\cap FDR(X)$ и утверждения (3).

(6) Двойственно утверждению (5), поскольку полугруппа $coc(X)$ антиизоморфна полугруппе $c(X)$.

Замечание 3. Можно дать полугрупповую характеризацию полугруппы $FR(X)$ всевозможных полных бинарных отношений на множестве X как $FR(X)=\cup\{FDR(Y)\colon Y\subseteq X\}$, а также двойственных полугруппам $FDR(X)$ и $S(X)$ полугрупп, соответственно, всех полных сюръективных и всех инъективных сюръективных бинарных отношений на множестве X.

2.3. Изоморфизмы полугрупп бинарных отношений

Для любой биекции φ множества X на множество Y зададим отображение $\alpha_\varphi\colon R(X)\to R(Y)$ формулой

$$\forall f\in R(X)\ \alpha_\varphi(f)=\varphi^{-1}f\varphi.$$

Ясно, что α_φ будет изоморфизмом полугруппы $R(X)$ на полугруппу $R(Y)$, называемым *индуцированным изоморфизмом*, порожденным биекцией φ. При этом, как легко видеть, разные (неравные) биекции φ индуцируют разные изоморфизмы α_φ.

Теорема 2. *Для любых непустых множеств X и Y всякий изоморфизм полугруппы $R(X)$ на полугруппу $R(Y)$ является индуцированным.*

Доказательство. Пусть α – произвольный изоморфизм полугруппы $R(X)$ на полугруппу $R(Y)$. По предложению 1 изоморфизм α устанавливает биективное соответствие между множеством $\{\pi_x\colon x\in X\}$ константных отображений полугруппы $R(X)$ и множеством $\{\pi_y\colon y\in Y\}$ константных отображений полугруппы $R(Y)$, а также между множествами $\{\pi^x\colon x\in X\}$ и $\{\pi^y\colon y\in Y\}$ коконстантных отношений полугрупп $R(X)$ и $R(Y)$.

Зададим биекцию $\varphi\colon X\to Y$ формулой

$$\varphi(x)=y\Leftrightarrow\alpha(\pi_x)=\pi_y \text{ для любых } x\in X \text{ и } y\in Y.$$

Покажем, что $\alpha(\pi^a)=\pi^{\varphi(a)}$ для всех $a\in X$. Действительно, если $a\in X$ и $\alpha(\pi^a)=\pi^d$ для элемента $d\in Y$, то по лемме 4

$$\pi_a\pi^a\neq\varnothing\Rightarrow\pi_{\varphi(a)}\pi^d=\alpha(\pi_a)\alpha(\pi^a)\neq\varnothing\Leftrightarrow\varphi(a)=d.$$

Докажем равенство $\alpha(\rho)=\alpha_\varphi(\rho)$ для любого $\rho\in R(X)$. Пусть c, $d\in Y$ и $\varphi(a)=c$, $\varphi(b)=d$ для подходящих a, $b\in X$. Тогда $\alpha(\pi_a)=\pi_c$ и $\alpha(\pi_b)=\pi_d$. На основании леммы 4 имеем:

$$c\alpha(\rho)d\Leftrightarrow\pi_c\alpha(\rho)\pi^d\neq\varnothing\Leftrightarrow\alpha(\pi_a)\alpha(\rho)\alpha(\pi^b)=\alpha(\pi_a\rho\pi^b)\neq\varnothing\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\pi_a\rho\pi^b\neq\varnothing\Leftrightarrow a\rho b\Leftrightarrow c(\varphi^{-1}\rho\varphi)d\Leftrightarrow c\alpha_\varphi(\rho)d.$$

Следовательно, $\alpha=\alpha_\varphi$. Теорема доказана.

2.4. Абстрактная характеризация полугруппы *R*(*X*)

Мы даем следующую абстрактную характеризацию полугруппы $R(X)$ всех бинарных отношений на множестве X, имеющем не менее двух элементов.

Теорема 3. *Произвольная полугруппа S с нулем* 0 *изоморфна полугруппе $R(X)$ для некоторого множества мощности* ≥ 2 *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в S существуют непересекающиеся подполугруппы A правых нулей и B левых нулей;*

2) $\forall a, c\in A\ \forall b, d\in B\ (ba=dc\Rightarrow a=c\ \&\ b=d)$;

3) *имеется взаимно однозначное отображение* $'\colon A\to B$, *такое, что*

$$\forall a\in A\ \forall b\in B\ (ab\neq 0\Leftrightarrow b=a');$$

4) $\forall r, s\in S\ \forall a, c\in A\ (arsc'\neq 0\Leftrightarrow\exists e\in A\ are'esc'\neq 0)$;

5) $\forall r, s \in S\ \forall a, c, e \in A\ (are' \neq 0\ \&\ esc' \neq 0 \Rightarrow are'esc' \neq 0)$;

6) $\forall r, s \in S\ (\forall a \in A\ \forall b \in B\ (arb \neq 0 \Leftrightarrow asb \neq 0) \Rightarrow r = s)$;

7) $\forall T \subseteq BA\ \exists s \in S\ (\forall a \in A \forall b \in B\ (ba \in T \Leftrightarrow asb \neq 0)$.

Доказательство. Докажем сначала, что полугруппа $S=R(X)$ при неодноэлементном непустом множестве X удовлетворяет сформулированным условиям 1)–7). Положим $A=\{\pi_x: x\in X\}$ и $B=\{\pi^x: x\in X\}$. Ясно, что A есть полугруппа правых нулей, а B – полугруппа левых нулей и $A\cap B=\varnothing$. Для любых $x, y\in X$ имеем $\pi^x\pi_y=\{(x, y)\}$ по лемме 6 и $\pi_y\pi^x=\varnothing$ при $x\neq y$ и $\pi_y\pi^x=X\times X$ при $x=y$ по лемме 2. Поэтому в полугруппе $R(X)$ выполняются условия 1)–3).

Выполнение условий 4)–7) в $R(X)$ проверяется непосредственно.

В самом деле, пусть даны бинарные отношения $r=\rho$, $s=\sigma$ на X и $a=\pi_x$, $c=\pi_y$ для элементов $x, y\in X$. Тогда

$$\pi_x\rho\sigma\pi^y \neq \varnothing \Leftrightarrow x(\rho\sigma)y \Leftrightarrow \exists z \in X(x\rho z\ \&\ z\sigma y) \Leftrightarrow \exists z \in X\ \pi_x\rho\pi^z\pi_z\sigma\pi^y \neq \varnothing,$$

что доказывает 4). Если еще $e=\pi_z$ при $z\in X$, то, в силу 4), имеем

$$\pi_x\rho\pi^z \neq \varnothing\ \&\ \pi_z\sigma\pi^y \neq \varnothing \Rightarrow \pi_x\rho\sigma\pi^z \neq \varnothing \Rightarrow \pi_x\rho\pi^z\pi_z\sigma\pi^y \neq \varnothing,$$

что доказывает 5).

Условия 6) и 7) вытекают из определения бинарного отношения.

Обратно, пусть дана полугруппа S с нулем 0, обладающая свойствами 1)–7). Докажем, что полугруппа S изоморфна полугруппе $R(A)$, где A – полугруппа правых нулей из условия 1).

Каждому элементу $r\in S$ сопоставим бинарное отношение $\rho(r)$ на множестве A:

$$\forall x, y \in A\ (x\rho(r)y \Leftrightarrow xry' \neq 0).$$

При этом, как легко видеть, $\rho(a)=\pi_a$ и $\rho(b)=\pi^c$ при $c\in A$ и $b=c'$. Условия 2), 3), 6) и 7) обеспечивают взаимную однозначность отображения $\rho: S\to R(A)$.

Остается показать, что биекция ρ будет полугрупповым гомоморфизмом, т. е. $\rho(rs)=\rho(r)\rho(s)$ для любых $r, s\in S$. Возьмем произвольные элементы $a, c\in A$. По определению отображения ρ и условиям 4) и 5) имеем

$$a\rho(rs)c \Leftrightarrow arsc' \neq 0 \Leftrightarrow \exists e \in A\ are'esc' \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists e \in A\ (are' \neq 0\ \&\ esc' \neq 0) \Leftrightarrow \exists e \in A\ (a\rho(r)e\ \&\ e\rho(s)c) \Leftrightarrow a\big(\rho(r)\rho(s)\big)c.$$

Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий, что условие 7) не выводится из остальных условий теоремы 3.

Пример. Возьмем любое неодноэлементное непустое множество X и рассмотрим следующее подмножество S полугруппы $R(X)$:

$$S = \{\pi_x: x \in X\} \cup \{\pi^x: x \in X\} \cup \{\pi^x\pi_y: x, y \in X\} \cup \{\varnothing, 1_X, X \times X\}.$$

Ясно, что S является подполугруппой полугруппы $R(X)$, имеет нуль $\varnothing$ и единицу 1_X, удовлетворяет условиям 1)–6) теоремы 3. Но в полугруппе S не выполняется условие 7), поскольку S не содержит двухэлементные бинарные отношения $\{(x, y), (y, x)\}$ при $x\neq y$ в X.

3. Обсуждение

Теорема 2 является дискретным аналогом теоремы 1 работы [7]. В свете теоремы 2 нашу теорему 1 можно уточнить, добавив в ее формулировку слова "с точностью до биективных преобразований множества X".

Для любого отображения $f\in S(X)$ и любых элементов a, $b\in X$ имеем: $\pi_a f=\pi_b \Leftrightarrow f(a)=b$. Поэтому всякий изоморфизм полугруппы $S(X)$ на полугруппу $S(Y)$ индуцирован подходящей биекцией φ множества X на множество Y. Тем самым мы получаем указанную в начале статьи теорему Шрейера–Мальцева. Кроме того, в силу теоремы 2, все изоморфизмы полугрупп $S(X)$ и $S(Y)$ однозначно продолжаются до изоморфизмов полугрупп $R(X)$ и $R(Y)$.

Данная нами абстрактная характеризация полугрупп $R(X)$ может показаться несколько искусственной, но она продиктована и мотивирована конкретным устройством полугрупп бинарных отношений. По аналогии с приведенным примером можно обосновать логическую независимость каждого из условий 2), 4)–6) в формулировке теоремы 3.

4. Заключение

Нами получены следующие важные результаты о полугруппе $R(X)$ всех бинарных отношений на произвольном множестве X. Теорема 1 показывает, что на алгебраическом языке полугруппы $R(X)$ можно выразить любой факт о бинарных отношениях на множестве X. В теореме 2 описаны все изоморфизмы полугрупп $R(X)$ и $R(Y)$. В теореме 3 дана абстрактная характеризация полугрупп $R(X)$.

Список источников

1. *Вечтомов Е. М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. 1990. Т. 28. С. 3–46.
2. *Maggil K. D.* A survey of semigroups of continuous selfmaps // Semigroup Forum. 1975. Vol. 11. P. 189–282. URL: https://doi.org/10.1007/BF02195270 (дата обращения: 10.06.2025).
3. *Riguet J.* Relations binaries, fermetures, correspondences de Galois // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1948. Vol. 76. P. 114–155.
4. *Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И.* Полные полугруппы бинарных отношений: монография. М.: Изд-во "Спутник", 2010. 657 с.
5. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения. 1965. Вып. 1. С. 3–178.
6. *Зарецкий К. А.* Полугруппа бинарных отношений // Математический сборник. 1963. Т. 61(103). № 3. С. 291–305.
7. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Полугруппы относительно непрерывных бинарных отношений и их изоморфизмы // Математические заметки. 2023. Т. 113, вып. 6. С. 807–819. DOI: 10.4213/mzm13854 EDN: UMNZEC
8. *Vechtomov E. M.* Isomorphisms of semirings of continuous binary relations on topological spaces // Semigroup Forum. 2023. Vol. 106, № 1. P. 327–331. DOI: 10.1007/s00233-022-10327-w. EDN: QIOVQD.
9. *Вечтомов Е. М., Волков М. В.* Об определяемости топологических пространств полугруппами непрерывных бинарных отношений // Математические заметки. 2025. Т. 117, вып. 2. С. 196–203. DOI: 10.4213/mzm14345. EDN: CFLLDA.

References

1. Vechtomov, E. M. (1990), "Questions of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions", *Itogi nauki i tekhniki. VINITI AN SSSR. Algebra. Topologiya. Geometriya*, vol. 28, pp. 3–46.

2. Maggil, K. D. (1976), "A survey of semigroups of continuous self-maps", *Semigroup Forum*, vol. 11, pp. 189–282, https://doi.org/10.1007/BF02195270.
3. Riguet, J. (1948), "Relations binaries, fermetures, correspondences de Galois", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 76, pp. 114–155.
4. Diassamidze, Ya. I. and Makharadze, Sh. I. (2010), *Polnye polugruppy binarnykh otnoshenii: monografiya* [Complete semigroups of binary relations: a monograph], Sputnik, Moscow, Russia.
5. Wagner, V. V. (1965), "Theory of relations and algebra of partial mappings", *Teoriya polugrupp i ee prilozheniya* [Semigroup Theory and Its Applications], vol. 1, pp. 3–178.
6. Zaretskii, K. A. (1963), "Semigroup of binary relations", *Matematicheskii sbornik* [Mathematical Collection], vol. 61, no 3, pp. 291–305.
7. Varankina, V. I. and Vechtomov, E. M. (2023), "Semigroups of continuous binary relations and their isomorphisms", *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], vol. 113, pp. 807–819.
8. Vechtomov, E. M. (2023), "Isomorphisms of semirings of continuous binary relations on topological spaces", *Semigroup Forum*, vol. 106, no 1, pp. 327–331.
9. Vechtomov, E. M. and Volkov, M. V. (2025), "On definability of topological spaces by semigroups of continuous binary relations", *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], vol. 117, no 2, pp. 196–203.

Информация об авторах:

Е. М. Вечтомов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 146598;

А. А. Мамаев – магистрант кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36).

Information about the authors:

E. M. Vechtomov – Doctoral of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 146598;

A. A. Mamaev – Master’s of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000).