

Научная статья

УДК 681.51, 517.977, 004.94

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-2-123-136

<https://elibrary.ru/lasrhw>



Решение задачи расстановки обнаружителей для охраны периметра градиентным методом

Марина Александровна Самохина ¹, Александр Сергеевич Самохин ²

^{1,2}Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук,
г. Москва, Россия

¹ph@ipu.ru

²samokhin@ipu.ru

Аннотация. Работа посвящена математическим аспектам создания современной охранной системы. Разработан метод численного решения задачи оптимизации расстановки обнаружителей с целью противодействия прорыву защищаемого периметра. Защищаемый периметр представляет собой отрезок на плоскости, который пытается за заданное время пересечь уклоняющийся от обнаружения подвижный объект. Данный объект рассматривается как материальная точка, управляемая с целью минимизации функционала риска обнаружения по первичному гидроакустическому полю. Задача формализуется как задача максимина, обнаружители следует расставить в допустимой области таким образом, чтобы минимально возможное значение функционала подвижного объекта было наибольшим. Для решения авторами был разработан программный комплекс на языке C++. В работе приводятся результаты численного моделирования, полученные с использованием градиентного метода и решения краевой задачи принципа максимума Л.С. Понтрягина для нахождения локально оптимальных траекторий во вспомогательной задаче поиска пути подвижным объектом. Краевая задача решалась методом стрельбы, соответствующие задачи Коши изначально формировались заданием значений параметров пристрелки на сетке в пространстве их возможных значений, и интегрировались численно методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага. Далее значения параметров пристрелки уточнялись модифицированным методом Ньютона. В результате численного моделирования расстановки пяти сенсоров оказалось, что выгоднее всего расставлять их таким образом, чтобы первые шесть лучших локально оптимальных траекторий уклоняющегося объекта совпадали по функционалу.

Ключевые слова: *расстановка обнаружителей; конфликтная среда; противодействие уклонению; планирование пути; оптимизация; градиентный метод; численное моделирование; защита периметра; предотвращение прорыва; максимин*

Для цитирования: Самохина М. А., Самохин А. С. Решение задачи расстановки обнаружителей для охраны периметра градиентным методом // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 2(69). С. 123–136. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-2-123-136. <https://elibrary.ru/lasrhw>

Благодарности: работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда, проект № 23-19-00134; авторы выражают благодарность Галяеву Андрею Алексеевичу за плодотворное обсуждение работы.



Эта работа © 2025 Самохина М. А., Самохин А. С. распространяется по лицензии CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 21.05.2025; принята к публикации 11.07.2025.

Research article

Solution of the Sensors Placement Problem for Perimeter Defense Using the Gradient Method

Marina A. Samokhina¹, Alexander S. Samokhin²

^{1,2}V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹ph@ipu.ru

²samokhin@ipu.ru

Abstract. The research is devoted to the mathematical aspects of creating a modern security system. The paper develops a method that numerically solves the problem of optimizing the deployment of sensors to counteract the breach of a protected perimeter. The protected perimeter is a segment on the plane, and a mobile object evading detection tries to cross it in a given time. This object is considered as a material point, controlled to minimize the risk functional of detection by the primary hydroacoustic field. The problem is formalized as a maximin problem, the sensors should be placed in the admissible area so that the minimum possible value of the functional of the mobile object was as large as possible. For the solution the authors have developed a program in C++ language. The paper presents the results of numerical modeling obtained using the gradient method and the solution of the boundary value problem of the maximum principle of L.S. Pontryagin to find locally optimal trajectories in the auxiliary problem of pathfinding by a mobile object. The boundary value problem was solved by the shooting method, the corresponding Cauchy problems were initially formed by setting the values of the shooting parameters on the grid of their possible values, and were integrated numerically by Runge-Kutta method with automatic step selection. Further, the values of shooting parameters were refined by the modified Newton's method. As a result of numerical modeling of 5 sensors placement, it turned out that it is most advantageous to place them in such a way that the first 6 best locally optimal trajectories of the evading object coincide in functional value.

Keywords: sensors placement; threat environment; evasion countering; path planning; optimization; gradient method; numerical simulations; perimeter defense; breach prevention; maximin

For citation: Samokhina, M. A. and Samokhin, A. S. (2025), "Solution of the Sensors Placement Problem for Perimeter Defense Using the Gradient Method", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(69), pp. 123–136. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2025-2-123-136. <https://elibrary.ru/lasrhw>

Acknowledgments: the work was supported in part by the Russian Science Foundation, Project № 23-19-00134; the authors would like to thank Andrei A. Galyaev for fruitful discussion of the research.

The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 21.05.2025; accepted for publication 11.07.2025.

Введение

В настоящее время все более широкое применение находят автономные необитаемые подводные аппараты. Такие устройства используются в научном, коммерческом, политическом секторах [1–3]. В том числе они могут использоваться для несанкционированного доступа к охраняемому объекту. Работа посвящена созданию современной

охранной системы противодействия такому доступу к протяженному защищаемому объекту, например газопроводу.

Предполагается, что система охраны строится из неподвижных обнаружителей, совместная задача которых заключается в противодействии скрытному перемещению автономного аппарата [4–9]. Настоящее исследование является развитием работ [10–12].

1. Постановка задачи

Считается, что обнаружители обладают равномерно распространяющимися бесконечными круговыми полями обнаружения, и их расположение, формирующее карту угроз [13], уклоняющемуся подвижному объекту (УПО) известно. Совместно УПО и обнаружители формируют конфликтную среду [14]. При заданной конфигурации обнаружителей УПО перемещается таким образом, чтобы минимизировать интегральный функционал – риск обнаружения [15].

Задача заключается в оптимизации расстановки неподвижных обнаружителей с целью максимизации минимально возможного значения функционала, оптимизируемого УПО. Рассматривается плоская модель, в которой УПО и обнаружители представляют собой материальные точки.

2. Формализация задачи

На плоскости вводится декартова система координат, без ограничения общности считается, что УПО перемещается из начала координат в конечный отрезок с ординатой 1 за фиксированное время T с максимальной скоростью v_{\max} и управляется модулем вектора скорости v и углом φ , задающим его направление, так, чтобы минимизировать функционал:

$$I = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N q_i \frac{v^2}{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \right) dt, \quad (2.1)$$

зависящий от величины вектора скорости УПО v , координат УПО (x, y) , расстояний $r_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ от УПО до каждого из обнаружителей S_i , заданных координатами (a_i, b_i) , весовых коэффициентов q_i влияния обнаружителей S_i и количества обнаружителей $N \geq 1$. Конечный отрезок выбирается достаточно длинным, таким, что его края недостижимы при заданных ограничениях на время и скорость передвижения. Нужно расположить точки S_i в области $y \geq Y$ так, чтобы по всем возможным наборам фиксированных расположений обнаружителей максимизировать: J – глобальный минимум функционала (2.1) УПО $J = \min_{(x(\cdot), y(\cdot))} I$, определяемого для каждого заданного расположения S_i , т.е. решить задачу максимизации минимума функционала I :

$$\hat{J} = \max_{\{(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)\}} \min_{(x(\cdot), y(\cdot))} I.$$

3. Метод решения

Считается, что ни в один момент времени $t \in [0, T]$ траектория УПО не проходит ни через один обнаружитель, $r_i(t) > 0$. Тогда задача поиска пути для фиксированного расположения обнаружителей на основе принципа максимума Понтрягина сводится к краевой задаче [16]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \hat{v} \cos \hat{\phi}, \\ \dot{y} = \hat{v} \sin \hat{\phi}, \\ \dot{p}_x = -\sum_{i=1}^N q_i \frac{\hat{v}^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot (x-a_i), \\ \dot{p}_y = -\sum_{i=1}^N q_i \frac{\hat{v}^2}{((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)^2} \cdot (y-b_i), \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{где } \hat{v} = \min \left(\frac{\|p\|}{\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}, v_{\max} \right), \quad (3.2)$$

$$\hat{\phi} : \cos \hat{\phi} = \frac{p_x}{\|p\|}, \sin \hat{\phi} = \frac{p_y}{\|p\|}, \|p\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} x(0) = 0, & p_x(T) = 0, \\ y(0) = 0, & y(T) = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Полученная краевая задача решается численно методом стрельбы. Для этого недостающие для формирования задач Коши параметры пристрелки при задании начального приближения перебираются на сетке своих возможных значений, а далее уточняются модифицированным многомерным методом Ньютона. Сами задачи Коши интегрируются методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага на основе контроля максимально допустимой локальной погрешности [17]. Найденные таким образом экстремали Понтрягина удовлетворяют необходимым условиям оптимальности. Среди всех построенных для фиксированного расположения обнаружителей траекторий выбирается траектория, соответствующая минимальному значению функционала I .

Для нахождения максимума функционала J по всем возможным расположениям обнаружителей S_i запускается метод проекции градиента [18] со стандартным условием остановки счета. Опишем его работу. Обозначим за $z_k = (a_1^k, b_1^k, a_2^k, b_2^k, \dots, a_N^k, b_N^k)^T$ вектор оптимизируемых параметров на k -м шаге. Тогда переход от z_k к z_{k+1} осуществляется по формуле

$$z_{k+1} = P(z_k + \theta_k \nabla J(z_k)), \quad (3.5)$$

где P – оператор проектирования на полуплоскость $y \geq Y$, а параметры $\theta_k > 0$ подбираются на каждом шаге решения задачи, так, чтобы сохранялась монотонность: $J(z_{k+1}) > J(z_k)$. При этом компоненты градиента функционала

$$\nabla J(z_k) = \left(\frac{\partial J(z_k)}{\partial a_1}, \frac{\partial J(z_k)}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial J(z_k)}{\partial a_N}, \frac{\partial J(z_k)}{\partial b_N} \right) \text{ в точке } z_k \text{ находятся численно для всех}$$

$$j=1, \dots, N \text{ по формулам } \frac{\partial J(z_k)}{\partial a_j} = \frac{J(z_k + h_{2j-1}) - J(z_k)}{h}, \frac{\partial J(z_k)}{\partial b_j} = \frac{J(z_k + h_{2j}) - J(z_k)}{h}, \text{ где}$$

h_l – вектор, у которого l -ная координата равна h , а все остальные координаты равны 0,

таким образом параметр h – шаг численного дифференцирования. Заметим, что для вычисления градиента $\nabla J(z_k)$ на шаге требуется $2N$ дополнительных вычислений функционала J , для чего в свою очередь решается $2N$ краевых задач (3.1)-(3.4).

Отметим, что при проектировании (3.5) на полуплоскость $y \geq Y$ точки (a_i, b_i) с координатой $b_i \geq Y$ сохраняются, а точки (a_i, b_i) с координатой $b_i < Y$ смещаются на прямую $y = Y$, переходя в точки с координатами (a_i, Y) .

4. Результаты численного моделирования

При моделировании в качестве одного из примеров для расчетов были выбраны следующие значения параметров задачи: $N = 5$, $q_i = 1$, $T = 2.6$, $v_{\max} = 1$, $Y = 0.6$ и отрезок финиша AB , $A = (-3, 1)$, $B = (3, 1)$, см. рис. 1. Для каждого фиксированного на шаге градиентного метода расположения обнаружителей пути УПО строились на основе решения краевой задачи принципа максимума [16]. Обнаружители разрешалось размещать в полуплоскости $y \geq Y$.

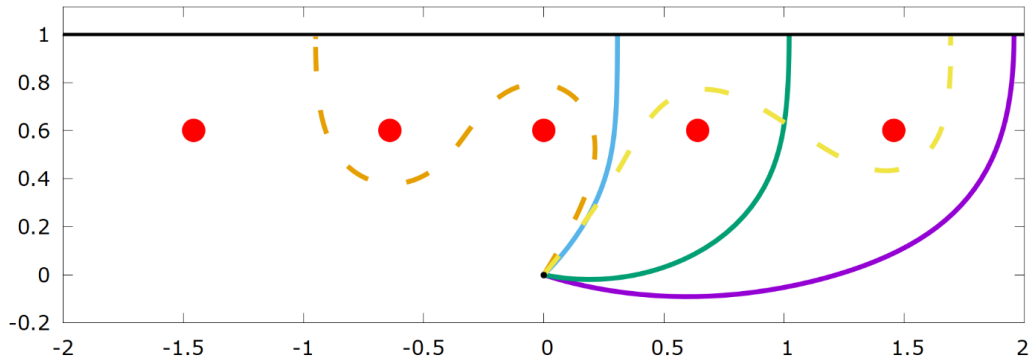


Рис. 1. Оптимальная конфигурация обнаружителей и соответствующая выходу УПО в правую полуплоскость из точки старта $(0,0)$ карта классификации локально оптимальных путей УПО для $N = 5$, $q_i = 1$, $T = 2.6$, $v_{\max} = 1$. Сплошными и прерывистыми линиями изображены локально оптимальные траектории УПО, красными кругами – места расположения обнаружителей S_i

Метод проекции градиента (3.5), запущенный из разных стартовых конфигураций точек по 10 параметрам – координатам S_i , каждый раз уменьшал b_i до выхода на ограничение $Y = 0.6$. При одинаковых весовых коэффициентах влияния q_i точки (a_i, b_i) располагались на прямой $y = Y$ симметрично перпендикуляр, опущенному из точки старта на конечный отрезок: $a_1 = -\alpha_1$, $a_2 = -\alpha_2$, $a_3 = 0$, $a_4 = \alpha_2$, $a_5 = \alpha_1$, при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, в случае одинаковых q_i для различных T , v_{\max} , Y изначальная 10-параметрическая задача в итоге сводилась к 2-параметрической задаче поиска величин α_1, α_2 , см. рис. 2.

На рис. 1 показаны траектории УПО, выходящие из точки старта под углом $\varphi(0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Также локально оптимальными являются траектории, симметричные им относительно перпендикуляра из точки старта на конечный отрезок.

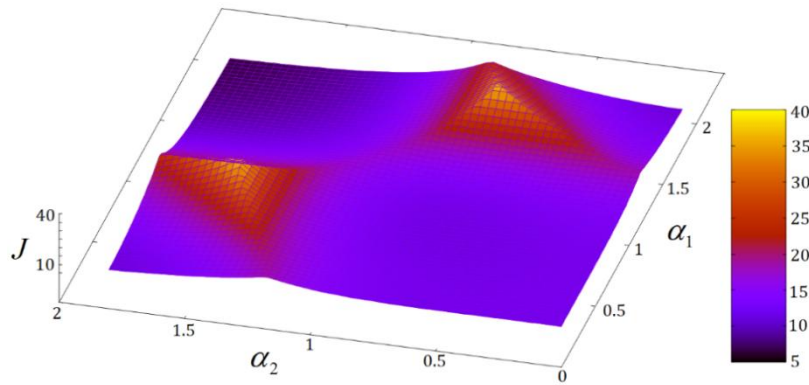


Рис. 2. Зависимость функционала задачи расстановки обнаружителей J от параметров α_1, α_2 при $N=5$, $q_i=1$, $T=2.6$, $v_{\max}=1$

В результате проведенного моделирования оказалось, что при оптимальном расположении пяти обнаружителей $\alpha_1 = 0.64$, $\alpha_2 = 1.46$, и получилась конфигурация, при которой на лучших шести локально оптимальных траекториях УПО достигается значение функционала $I = 38.3$, и, следовательно, $\hat{J} = 38.3$. Для выбранных параметров задачи это оптимальное значение достигается на трех траекториях, изображенных сплошными линиями на рис. 1 и трех симметричных им относительно перпендикуляра из точки старта на конечный отрезок.

График функционала J на рис. 2 получился ожидаемо симметричный по параметрам α_1, α_2 . По нему можно сделать вывод о единственности найденного решения задачи.

5. Аналитическое исследование

Помимо проведения численного моделирования были получены следующие теоретические результаты.

Лемма. При $v_{\max}T = 1 + \delta_1$, $\delta_1 > 0$ для любой расстановки N обнаружителей в полуплоскости $y \geq \delta_2$, $\delta_2 > 0$ существует решение задачи поиска пути УПО из точки $O(0,0)$ в отрезок E_1E_2 , $E_1 = (-c,1)$, $E_2 = (c,1)$, $c > 0$, на котором функционал I ограничен.

Доказательство. Построим траекторию $(x(t), y(t))$, не проходящую через N фиксированных обнаружителей с координатами (a_i, b_i) , $i \in \{1, \dots, N\}$.

Обозначим $\varepsilon = \min\left(\frac{\delta_1}{2\pi N}, \frac{\delta_2}{2}, \frac{c}{N}, 1\right)$ и вокруг каждого обнаружителя $S_i(a_i, b_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ построим открытый шар $B(S_i, \varepsilon)$ с центром $S_i(a_i, b_i)$ и радиусом ε . Обозначим $E(0,1)$ ближайшую к точке старта O точку на конечном отрезке E_1E_2 . Построим пошагово плоское множество Φ , граничные точки которого $\partial\Phi$ будут содержать допустимые траектории УПО, следующим образом. Положим $\Phi_0 = OE$, $\Theta_0 = \{1, \dots, N\}$.

Пусть после k шагов построены плоское множество Φ_k и Θ_k – множество индексов еще не включенных в Φ_k шаров. Сделаем $(k+1)$ -й шаг построения:

$\mathcal{D}_k = \{i: i \in \Theta_k, B(S_i, \varepsilon) \cap \Phi_k \neq \emptyset\}$, тогда если $\mathcal{D}_k = \emptyset$, то на этом построение заканчивается, и $\Phi = \Phi_k$, $\Theta = \Theta_k$, иначе $\Phi_{k+1} = \Phi_k \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{D}_k} \bar{B}(S_i, \varepsilon) \right)$ и $\Theta_{k+1} = \Theta_k \setminus \mathcal{D}_k$. Заметим, что в множестве Θ_0 изначально N элементов, и на каждом шаге из него удаляется хотя бы один элемент, поэтому не более, чем за $N < \infty$ шагов множества Φ и Θ будут построены, см. рис. 3 а).

Для $\partial\Phi$ будут выполнены следующие свойства:

- 1) $\partial\Phi$ состоит из конечного числа отрезков и конечного числа частей окружностей (по построению);
- 2) любая точка $\partial\Phi$ удалена от каждого из обнаружителей S_i не менее, чем на ε (по построению);
- 3) $O \in \partial\Phi$, так как все $b_i \geq \delta_2$, $i \in \{1, \dots, N\}$ и радиусы шаров $\bar{B}(S_i, \varepsilon)$ не более $\frac{\delta_2}{2}$,

поэтому ордината любой точки каждого из шаров не менее $\delta_2 - \frac{\delta_2}{2} = \frac{\delta_2}{2} > 0$, и

$O \notin \bar{B}(S_i, \varepsilon)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, но $O \in \partial\Phi$ в начале построения;

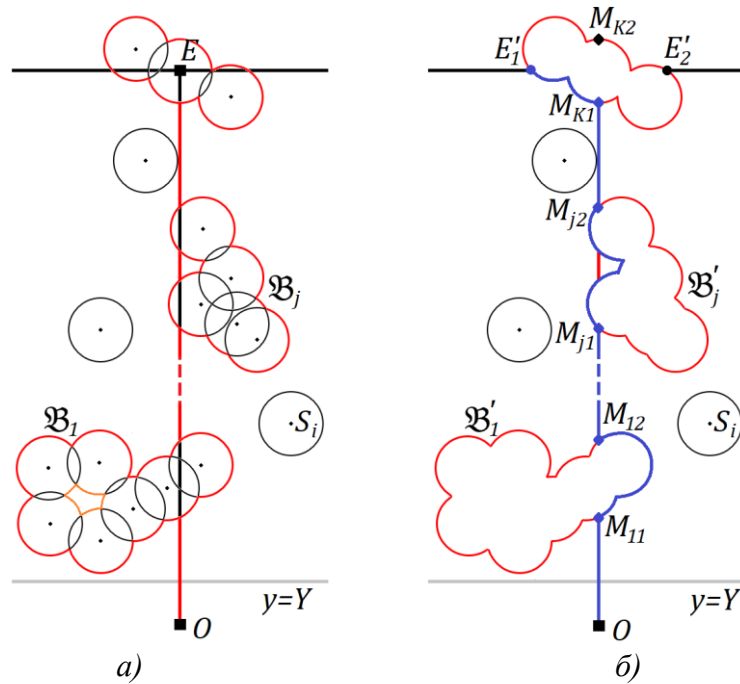


Рис. 3 а) Плоское множество Φ , часть границы которого $\partial\Phi$, обозначенная красной линией, содержит допустимые траектории УПО; б) Плоское множество Φ' и траектория УПО, показанная синей линией

- 4) отрезок финиша $E_1E_2 \cap \partial\Phi \neq \emptyset$, так как $E \in E_1E_2$, $E \in \Phi$ вначале и благодаря выбору ε ;
- 5) объединение всех шаров не покрывает отрезок E_1E_2 целиком, то есть

$$E_1E_2 \not\subset \bigcup_{i=1}^N B(S_i, \varepsilon) \text{ благодаря выбору } \varepsilon;$$

б) по построению, общая длина границы $\ell(\partial\Phi) \leq OE + 2\pi\varepsilon \cdot N \leq 1 + 2\pi\varepsilon \cdot N \leq 1 + \delta_1$.

Покажем, что можно выбрать траекторию движения из начальной точки O в какую-то точку конечного интервала, как часть $\partial\Phi$.

Для этого покажем, что можно разбить все шары $\bar{B}(S_i, \varepsilon) \subset \Phi$ на конечное число непересекающихся объединений \mathcal{B}_j . Обозначим $\mathcal{G}_0 = \{1, \dots, N\} \setminus \Theta$ – множество индексов шаров, лежащих в Φ .

Построим пошагово плоскую фигуру \mathcal{B}_1 . Выберем какой-нибудь индекс $i \in \mathcal{G}_0$. Положим $\mathcal{B}_1^1 = B(S_i, \varepsilon)$, $\mathcal{G}_1^1 = \mathcal{G}_0 \setminus \{i\}$. Пусть после k шагов построены фигура \mathcal{B}_1^k и \mathcal{G}_1^k – множество индексов шаров, входящих в фигуру Φ , но еще не включенных в \mathcal{B}_1^k . Сделаем $(k+1)$ -й шаг построения \mathcal{B}_1 : $\mathcal{D}_1^k = \{i : i \in \mathcal{G}_1^k, \bar{B}(S_i, \varepsilon) \cap \mathcal{B}_1^k \neq \emptyset\}$, тогда, если $\mathcal{D}_1^k = \emptyset$, то на этом построение заканчивается, и $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^k$, $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1^k$, иначе

$\mathcal{B}_1^{k+1} = \mathcal{B}_1^k \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{D}_1^k} \bar{B}(S_i, \varepsilon) \right)$ и $\mathcal{G}_1^{k+1} = \mathcal{G}_1^k \setminus \mathcal{D}_1^k$. Заметим, что в множестве \mathcal{G}_0 изначально не

более N элементов, и каждый шаг из него удаляется хотя бы один элемент, поэтому не более чем за $N < \infty$ шагов фигура \mathcal{B}_1 и множество \mathcal{G}_1 будут построены. Остальные плоские фигуры \mathcal{B}_j и множества индексов \mathcal{G}_j строятся последовательно по аналогии. Так как каждая из построенных фигур \mathcal{B}_j включает в себя хотя бы один шар, то количество элементов в \mathcal{G}_j с каждым новым построенным множеством уменьшается хотя бы на 1, поэтому за $K \leq N < \infty$ шагов, множество \mathcal{G}_K станет пустым, и приведенный выше алгоритм завершится.

Заметим, что все $\mathcal{B}_j \setminus \partial\mathcal{B}_j$ являются конечносвязными областями, получающимися из некоторой односвязной области D_j^0 исключением лежащих в ней односвязных областей $D_j^1, D_j^2, \dots, D_j^{N_j}$, а также их границ. Положим $\mathcal{B}_j' = D_j^0 \cup \partial D_j^0, j = 1, \dots, K$ и $\Phi' = OE \cup \left(\bigcup_{j=1}^K \mathcal{B}_j' \right)$, тогда $\Phi \subseteq \Phi'$, Φ' является односвязным замкнутым ограниченным множеством и $\partial\Phi'$ совпадает с внешней границей фигуры Φ , т.е. $\partial\Phi' \subseteq \partial\Phi$.

Теперь построим путь из точки O до конечного отрезка E_1E_2 , проходящий по $\partial\Phi'$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, K\}$ множество точек пересечения $\partial\mathcal{B}_j'$ с лучом OE будет содержать от 1 до $2N$ точек, причем у всех таких точек будут разные ординаты. Обозначим точки пересечения $\partial\mathcal{B}_j'$ с отрезком OE с наименьшей и с наибольшей ординатами M_{j1} и M_{j2} соответственно. Тогда M_{j1} лежит в пределах от $\frac{\delta_2}{2}$ до 1, M_{j2} лежит в пределах от $\frac{\delta_2}{2} + 2\varepsilon$ до $1 + 2\varepsilon N < \infty$ и при движении от точки M_{j1} к точке M_{j2} по $\partial\mathcal{B}_j'$ ордината УПО увеличится. M_{j1} и M_{j2} делят $\partial\mathcal{B}_j$ на две части, при движении УПО от M_{j1} к M_{j2} по одной из них область будет находиться слева от УПО, а по другой – справа. В качестве пути выберем ту часть границы $\partial\mathcal{B}_j$, длина которой меньше, и любую, если длины равны.

Вначале от точки O будем двигаться по отрезку OE "вверх" (с увеличением ординаты) до первой точки M_{k_1} с наименьшей ординатой среди всех точек $M_{j_1}, j \in \{1, \dots, K\}$, либо до точки E , если $K = 0$. Построение пути заканчивается, когда УПО впервые оказывается в точке с ординатой 1. Далее УПО движется по границе $\partial\mathcal{B}_k'$ до точки M_{k_2} . Если ордината точки M_{k_2} больше 1, то по непрерывности кривой $\partial\mathcal{B}_k'$, на ней найдется точка с ординатой 1, а конечной точкой пути будет ближайшая к M_{k_1} такая точка. Если ордината точки M_{k_2} равна 1, конечной точкой пути будет M_{k_2} . Если же ордината точки M_{k_2} меньше 1, то далее опять чередуются движение по отрезку OE с движением по границе $\partial\mathcal{B}_j'$, причем M_{j_1} каждый раз, кроме первого, выбирается из множества $M_{j_1}, j \in \{1, \dots, K\}$, ордината которых больше ординаты M_{j_2} на предыдущем шаге. Заметим, что чередоваться движения УПО по отрезку и по $\partial\mathcal{B}_j', j \in \{1, \dots, K\}$ могут не более $K \leq N < \infty$ раз. Если построение пути не закончено, то далее УПО движется по отрезку OE до точки $E(0,1)$, которая будет конечной точкой пути.

Таким образом, если УПО будет двигаться из точки O в направлении к конечному интервалу по $\partial\Phi' \subseteq \partial\Phi$ указанным выше образом, то траектория движения $(x(t), y(t))$, не будет содержать ни одного обнаружителя, ее длина не будет превосходить $1 + \delta_1$, а значение функционала I^* на такой траектории можно оценить следующим образом:

$$I^* \leq N \frac{q_{\max} v_{\max}^2 T}{r_{\min}^2} = N \frac{q_{\max} v_{\max} (1 + \delta_1)}{\varepsilon^2} < \infty.$$

Замечание 1. Выбор $\varepsilon \leq \frac{c}{N}$ гарантирует наличие точек на конечном отрезке, не покрытых шарами, построенными вокруг S_i , выбор $\varepsilon \leq \frac{\delta_2}{2}$ гарантирует, что точка старта УПО не покрыта ни одним из построенных шаров. Выбор $\varepsilon \leq \frac{\delta_1}{N}$ обеспечивает то, что множество проекций построенных шаров на отрезок $E_1 E_2 \cap [(1 - \delta_1, 1), (1 + \delta_1, 1)]$ не покрывает его целиком, а значит на нем есть некоторая непокрытая точка $P(x_p, 1)$, и тогда для УПО есть более простой по конфигурации путь, состоящий из горизонтального участка $\overline{OP_0}$, где $P_0 = (x_p, 0)$, затем вертикального $\overline{P_0 P}$, проходящий на удалении не менее ε от каждого из обнаружителей. Такой путь (изображен зеленой линией на рис. 4) может значительно отклоняться от отрезка OE по сравнению с путем, построенным в лемме, изображенным синей линией на рис. 4.

Замечание 2. Приведенный в лемме способ построения траектории движения применим также при условии заранее неизвестного УПО положения обнаружителей, но при известном их количестве и возможности их обнаружения и изменения направления движения УПО на расстоянии не менее ε . Оценка сверху для риска обнаружения I^* на построенной таким образом траектории не изменится.

Теорема. При $v_{\max} T = 1 + \delta_1$, $\delta_1 > 0$ и $y \geq \delta_2 > 0$ функционал J задачи расстановки обнаружителей с целью противодействия УПО, перемещающемуся из точки $O(0,0)$ в отрезок $E_1 E_2$, $E_1 = (-c, 1)$, $E_2 = (c, 1)$, $c > 0$, ограничен.

Доказательство. Доказанная в лемме оценка сверху для функционала I не зависит от расположения обнаружителей $S_i(a_i, b_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Поэтому

$$J = \min_{(x(\cdot), y(\cdot))} I \leq I^* \leq N \frac{q_{\max} v_{\max} (1 + \delta_1)}{\varepsilon^2} < \infty, \text{ где } \varepsilon = \min \left(\frac{\delta_1}{2\pi N}, \frac{\delta_2}{2}, \frac{c}{N}, 1 \right).$$

Замечание 3. Лемма позволяет УПО добраться до некоторой точки любого отрезка длины $2c > 0$. Если же в соответствии с изначальной постановкой c таково, что с заданным ограничением на скорость УПО фиксированного времени не хватит, чтобы добраться до концов отрезка $E_1 E_2$, то член $\frac{c}{N}$ в определении ε в доказательстве леммы и теоремы избыточен, так как в этом случае из теоремы Пифагора следует, что $c > \delta_1$.

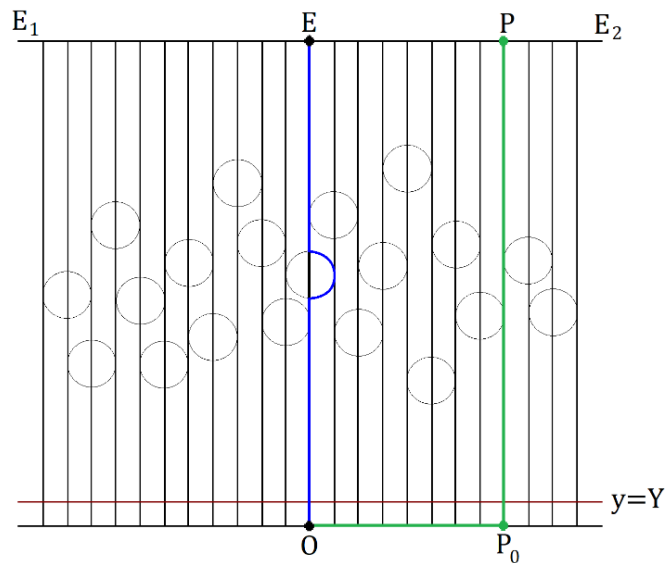


Рис. 4. Сравнение синего пути УПО, построенного по лемме, и зеленого, построенного по замечанию 1. Вертикальными линиями отмечены проекции шаров вокруг обнаружителей на отрезок финиша

Заключение

В статье разработан метод расстановки обнаружителей на плоскости с целью противодействия скрытному перемещению УПО для охраны периметра, математически представляющего собой отрезок. Задача расстановки решается градиентным методом, в котором оптимизируемыми параметрами являются координаты обнаружителей. При этом для каждой заданной их конфигурации, рассматриваемой в ходе решения, численно решается задача классификации путей УПО в конфликтной среде на основе принципа максимума Понтрягина. Авторами реализован программный комплекс на языке С, в работе приводятся результаты численного моделирования.

В качестве примера рассмотрена расстановка пяти обнаружителей при равномерно распространяющихся бесконечных круговых полях обнаружения. Интерес представляет теоретическое обоснование полученного результата – того, что при оптимальной конфигурации обнаружителей функционал I на лучших для УПО $N+1$ локально оптимальных путях УПО совпадает.

Ясно что функционал расстановки \hat{J} ограничен нулем снизу. В работе теоретически показана также ограниченность минимизируемого УПО функционала сверху для любой расстановки обнаружителей, приведены способы построения траекторий, для которых ограничение будет выполнено независимо от расположения обнаружителей.

Развитием задачи является рассмотрение более сложных диаграмм направленности обнаружителей. Возможно также рассмотрение задачи в трехмерной постановке и решение другими методами численной оптимизации. Постановка может быть обобщена на случай прорыва периметра группой объектов [19]–[20].

Список источников

1. *Gafurov S., Klochkov E.* Autonomous Unmanned Underwater Vehicles Development Tendencies // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 106. P. 141–148. 10.1016/j.pro-eng.2015.06.017 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1016/j.pro-eng.2015.06.017 EDN: VAJWBB
2. *Mondal K., Banerjee T., Panja A.* Autonomous Underwater Vehicles: Recent Developments and Future Prospects // *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*. 2019. Vol. 7 (XI). P. 215–222. 10.22214/ijraset.2019.11036 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.22214/ijraset.2019.11036
3. *Wynn R. B., Huvenne V. A. I., Le Bas T. P., Murton B. J., et al.* Autonomous Underwater Vehicles (AUVs): Their past, present and future contributions to the advancement of marine geoscience // *Marine Geology*. 2014. Vol. 352. P. 451–468. 10.1016/j.margeo.2014.03.012 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1016/j.margeo.2014.03.012
4. *Railey K., Dibiaso D., Schmidt H.* Passive acoustic detection and tracking of an unmanned underwater vehicle from motornoise // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. Vol. 149. A34–A35. 10.1121/10.0004444 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1121/10.0004444
5. *Abbasov I. B.* Hydroacoustic Ocean Exploration: Theories and Experimental Application. Beverly, MA, USA: Wiley & Sons and Scrivener Publishing. 2016. 192 p. 10.1002/9781119323723 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1002/9781119323723
6. *Abraham D. A.* Underwater Acoustic Signal Processing: Modeling, Detection, and Estimation. Springer Nature: Cham, Switzerland. 2019. 834 p. 10.1007/978-3-319-92983-5 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1007/978-3-319-92983-5
7. *Ivanov P. V., Kolev N. Zh.* Acoustical system for synthetic imaging of an underwater object in a hydroacoustical test tank. National conference "Acoustics 2014". Vol. 16. P. 146–150.
8. *Buszman K., Gloza M.* Detection of Floating Objects Based on Hydroacoustic and Hydrodynamic Pressure Measurements in the Coastal Zone // *Polish Maritime Research, Sciendo*. 2020. Vol. 27 (2). P. 168–175. 10.2478/pomr-2020-0038 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.2478/pomr-2020-0038 EDN: XEDKIE
9. *Shirokov V., Bazhenova A., Milich V.* A set of instruments for tracking moving objects in the underwater environment // *AIP Conference Proceedings*. 2023. 2605 (1), 020026. 8 p. 10.1063/5.0111555 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1063/5.0111555 EDN: PAYCHY

10. Galyaev A., Samokhin A., Samokhina M. Application of the Gradient Projection Method to the Problem of Sensors Arrangement for Counteraction to the Evasive Object // 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). IEEE. 2021. 3 p. URL: 10.23919/icins43216.2021.9470857 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.23919/icins43216.2021.9470857 EDN: IAIIMC
11. Галяев А. А., Самохин А. С., Самохина М. А. Оптимизация расстановки обнаружителей градиентным методом // Проблемы управления безопасностью сложных систем: материалы XXVIII междунар. конф. 16 декабря 2020 г. М.: ИПУ РАН. 2020. С. 359–363. URL: 10.25728/iccss.2020.90.62.064 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.25728/iccss.2020.90.62.064(EDN: MKWRWP
12. Galyaev A. A., Samokhin A. S., Samokhina M. A. On problem of optimal observers' placement on plane // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1864. № 1. P. 1–7 URL: (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012075 EDN: FCIQWC
13. Dogan A., Zengin U. Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2006. Vol. 29, № 4. P. 723–732. DOI: 10.2514/1.18386
14. Абрамянц Т. Г., Галяев А. А., Маслов Е. П., Рудько И. М., Яхно В. П. Уклонение подвижного объекта в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей // Проблемы управления. 2015. № 2. С. 31–37. EDN: TPWZQH
15. Сысоев Л. П. Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Проблемы управления. 2010. № 6. С. 65–72. EDN: MWLGRL
16. Самохина М. А., Галяев А. А. Построение карты локально оптимальных путей управляемого подвижного объекта в конфликтной среде при переходе из точки в точку // Проблемы управления. 2024. № 1. С. 90–102. URL: 10.25728/PU.2024.1.8 (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.25728/PU.2024.1.8 EDN: KAJQCZ
17. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020611811 Российская Федерация. Решение задачи Коши многомерным методом Рунге-Кутты, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 8(7), с автоматическим выбором шага: № 2020610774: заявл. 30.01.2020: опубл. 11.02.2020 / А. С. Самохин, М. А. Самохина.
18. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
19. Корепанов В. О., Новиков Д. А., Задача о диффузной бомбе // Проблемы управления. 2011. Вып. 5. С. 6–73. URL: 10.1134/S000511791305010X (дата обращения: 23.04.2025). DOI: 10.1134/S000511791305010X EDN: OEESCPZ
20. Корепанов В. О., Новиков Д. А. Модели стратегического поведения в задаче о диффузной бомбе // Проблемы управления. 2015. № 2. С. 38–44. EDN: TPWZQR

References

1. Gafurov, S. and Klochkov, E. (2015), "Autonomous Unmanned Underwater Vehicles Development Tendencies", *Procedia Engineering*, vol. 106, pp. 141–148.

2. Mondal, K., Banerjee, T. and Panja, A. (2019), "Autonomous Underwater Vehicles: Recent Developments and Future Prospects", *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*, vol. 7 (XI), pp. 215–222.
3. Wynn, R. B., Huvenne, V. A. I., Le Bas, T. P., Murton, B. J., et al. (2014), "Autonomous Underwater Vehicles (AUVs): Their past, present and future contributions to the advancement of marine geoscience", *Marine Geology*, vol. 352, pp. 451–468.
4. Railey, K., Dibiaso, D. and Schmidt, H. (2021), "Passive acoustic detection and tracking of an unmanned underwater vehicle from motornoise", *J. Acoust. Soc. Am.* 2021, vol. 149. A34–A35.
5. Abbasov, I. B. (2016), *Hydroacoustic Ocean Exploration: Theories and Experimental Application*. Wiley & Sons and Scrivener Publishing, Beverly, MA, USA.
6. Abraham, D. A. (2019), *Underwater Acoustic Signal Processing: Modeling, Detection, and Estimation*. Springer Nature: Cham, Switzerland.
7. Ivanov, P. V. and Kolev, N. Zh. (2014), "Acoustical system for synthetic imaging of an underwater object in a hydroacoustical test tank", *National conference "Acoustics 2014"*, vol. 16, pp. 146–150.
8. Buszman, K. and Gloza, M. (2020), "Detection of Floating Objects Based on Hydroacoustic and Hydrodynamic Pressure Measurements in the Coastal Zone", *Polish Maritime Research*, Sciendo, vol. 27 (2), pp. 168–175.
9. Shirokov, V., Bazhenova, A. and Milich, V. (2023), "A set of instruments for tracking moving objects in the underwater environment", *AIP Conference Proceedings*, vol. 2605, no 1:020026, 8 p.
10. Galyaev, A., Samokhin, A. and Samokhina, M. (2021), "Application of the Gradient Projection Method to the Problem of Sensors Arrangement for Counteraction to the Evasive Object", *28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS)*, IEEE, 3 p.
11. Galyaev, A.A., Samokhin, A. S. and Samokhina, M. A. (2020), "Optimization of detector placement using the gradient method", *Problemy upravleniya bezopasnost'yu slozhnykh sistem: materialy XXVIII mezhdunarodnoj konferencii* [Problems of Complex Systems Safety Management: Proceedings of the XXVIII International Conference], Moscow, Russia, December 16, 2020, pp. 359–363.
12. Galyaev, A. A., Samokhin, A. S. and Samokhina, M. A. (2021), "On problem of optimal observers' placement on plane", *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1864, no. 1, pp. 1–7.
13. Dogan, A. and Zengin, U. (2006), "Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 29, no. 4, pp. 723–732.
14. Abramyants, T. G., Galyaev, A. A., Maslov, E. P., Rudko, I. M. and Yakhno, V.P. (2015), "Mobile Object Evasion from Detection by a System of Heterogeneous Observers in Threat Environment", *Control Sciences*, no. 1, pp. 31–37.
15. Sysoev, L. P. (2010), "The Criterion of Probability Detecting on the Trajectory in the Problem of Movement Control in Threat Environment", *Control Sciences*, no. 6, pp. 64–70.
16. Samokhina, M. A. and Galyaev, A. A. (2024), "Constructing a Map of Locally Optimal Paths for a Controlled Moving Object in a Threat Environment", *Control Sciences*, no. 1, pp. 75–85.
17. Samokhin, A. S. and Samokhina, M. A., RUDN University (2021), *Reshenie zadachi Koshi mnogomernym metodom Runge-Kutty, osnovannym na raschyotnykh formulakh Dormana-Prinsa 8(7), s avtomaticheskim vyborom shaga* [Solving the Cauchy problem by the

multivariate Runge-Kutta method based on the Dorman-Prince 8(7) formulas with automatic step selection], Moscow, Russian Federation, Certificate of state registration of computer program no. 2020611811.

18. Vasiliev, F. P. (2002), *Metody optimizacii* [Optimization methods], Factorial Press, Moscow, Russia.
19. Korepanov, V. O. and Novikov, D. A. (2013), "The diffuse bomb problem", *Automation and Remote Control*, vol. 74, no. 5, pp. 863–874.
20. Korepanov, V. O. and Novikov, D. A. (2015), "Models of Strategic Behavior in the Diffuse Bomb Problem", *Control Sciences*, no. 2, pp. 38–44.

Информация об авторах:

М. А. Самохина – научный сотрудник 38 лаборатории «Управление по неполным данным» Института проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук (117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65), WoS Researcher ID: AAL-3864-2020, Scopus Author ID: 57201875555, РИНЦ Author ID: 1029494, Istina Researcher ID: 5803904;

А. С. Самохин – кандидат физико-математических наук, член Академии навигации и управления движением, старший научный сотрудник 38 лаборатории «Управление по неполным данным» Института проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук (117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65), WoS Researcher ID: N-1400-2019, Scopus Author ID: 56150017500, РИНЦ Author ID: 1029494. Istina Researcher ID: 3497959.

Information about the authors:

М. А. Samokhina – researcher, 38 laboratory «Control based on incomplete data», V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (65 Profsoyuznaya St., Moscow, Russia, 117997), WoS Researcher ID: AAL-3864-2020, Scopus Author ID: 57201875555, RSCI Author ID: 1029494. Istina Researcher ID: 5803904;

A. S. Samokhin – candidate of physical and mathematical sciences, member of Academy of Navigation and Motion Control, senior researcher, 38 laboratory «Control based on incomplete data», V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (65 Profsoyuznaya St., Moscow, Russia, 117997), WoS Researcher ID: N-1400-2019, Scopus Author ID: 56150017500, RSCI Author ID: 1029494. Istina Researcher ID: 3497959.