ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2025 Математика. Механика. Информатика 3(70)

Научная статья

УДК 512.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-44-53

https://elibrary.ru/ooessc

О некоторых свойствах полурешеток

Андрей Александрович Петров[1], Александр Павлович Шкляев[2]
[1, 2]Вятский государственный университет, Киров, Россия
[1]apetrov43@mail.ru
[2]sascha.schlyaev@yandex.ru

Аннотация. Полурешетки являются, по сути дела, идемпотентными моно-полукольцами. Доказано, что элементы всякой полурешетки разделяются ее простыми идеалами. Дано мультипликативное представление полуколец с полурешеточным умножением. Отсюда следует, что любая полурешетка изоморфна некоторой решетке множеств ее простого спектра. Установлено, что изоморфность произвольных полурешеток эквивалентна гомеоморфности их простых спектров. Показано, что конечные цепи являются ретрактами во всех содержащих их полурешетках. Получены следствия. Сделаны дополняющие замечания.

Ключевые слова: *полурешетка; полукольцо; полурешетка множеств; простой спектр; мультипликативное представление Стоуна; ретракт.*

Для цитирования: Петров А. А., Шкляев А. П. О некоторых свойствах полурешеток // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 44−53. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-44-53. https://elibrary.ru/ooessc.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Статья поступила в редакцию 16.04.2025; одобрена после рецензирования 09.08.2025; принята к публикации 26.09.2025.

Research article

About Some Properties of Semilattices

Andrey A. Petrov[1], Alexander P. Shklyaev[2]
[1, 2]Vyatka State University, Kirov, Russia
[1]apetrov43@mail.ru
[2]sascha.schlyaev@yandex.ru

Abstract. Semilattices are, in fact, idempotent mono-semirings. The article shows that elements of any semilattice are separated by its prime ideals. It gives a multiplicative representation of semirings with semilattice multiplication. This implies that any semilattice is isomorphic to some lattice of sets of its prime spectrum. It is shown that finite chains are retracts in all semilattices containing them. Corollaries are obtained. Additional remarks have been made.

Keywords: *semilattice; semiring; semilattice of sets; prime spectrum; Stone's representation; retract.*

For citation: Petrov, A. A. and Shklyaev, A. P. (2025), "About Some Properties of Semilattices", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 44–53, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-44-53, https://elibrary.ru/ooessc.
Acknowledgments: the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00117.

The article was submitted 16.04.2025; approved after reviewing 09.08.2025; accepted for publication 26.09.2025.

Введение

Статья посвящена теории полурешеток и их связям с полукольцами, мультипликативные полугруппы которых являются полурешетками.

Полурешетки можно трактовать как идемпотентные моно-полукольца, поэтому к ним применимы результаты общей теории полуколец. На этом пути получаются теорема 1, утверждающая разделяемость элементов произвольной полурешетки ее простыми идеалами, и теорема 2 о представлении полурешеток полурешетками множеств простого спектра.

С другой стороны, теорема 2 и теорема 3 об определяемости полурешеток их простыми спектрами применяются, соответственно, к идемпотентным моно-полукольцам (следствия 1 и 3) и к полукольцам с полурешеточным умножением и константным сложением (следствия 2 и 4).

Как показывают примеры 2 и 3, произвольные полукольца с полурешеточным умножением не обязаны определяться своим простым спектром.

Теорема 4 утверждает, что конечные цепи являются "абсолютными" ретрактами в классе всех полурешеток.

Необходимые понятия и факты можно найти в книгах [2, 3, 5–7].

Предварительные сведения

Полурешеткой называется идемпотентная коммутативная полугруппа. Мы будем пользоваться мультипликативными обозначениями, то есть полурешетка – это алгебраическая структура $\langle S, \cdot\rangle$ с одной бинарной операцией умножения $\cdot$, удовлетворяющей тождествам ассоциативности $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, коммутативности $x\cdot y = y\cdot x$, идемпотентности $x\cdot x = x$. Как правило, знак умножения $\cdot$ опускаем и пишем просто xy вместо $x\cdot y$.

Задавая на полурешетке $\langle S, \cdot\rangle$ бинарное отношение $\le$ по правилу: $x\le y$ означает $xy=x$, получим упорядоченное множество $\langle S, \le\rangle$, любые два элемента a, b которого имеют точную нижнюю грань $\inf\{a, b\} = ab$, называемое *нижней полурешеткой*, ассоциированной с полурешеткой $\langle S, \cdot\rangle$. Обратно, задавая на нижней полурешетке $\langle S, \le\rangle$ операцию умножения формулой: $a\cdot b=\inf\{a, b\}$ для любых a, $b\in S$, получим полурешетку $\langle S, \cdot\rangle$. Определения мультипликативно заданной полурешетки и нижней полурешетки равносильны. Эти структуры будем называть просто полурешетками.

Двойственным образом определяется *верхняя полурешетка* – как такое упорядоченное множество $\langle S, \le\rangle$, в котором любые два элемента a, b имеют точную верхнюю грань $\sup\{a, b\}$. Полагая при этом $a + b = \sup\{a, b\}$ для всех a, $b\in S$, получим полурешетку $\langle S, +\rangle$ в аддитивной записи. Если же на полурешетке $\langle S, +\rangle$ определить отношение $\le$ по правилу: $x\le y$ означает $x + y = y$, то получим упорядоченное множество $\langle S, \le\rangle$, являющееся верней полурешеткой. Понятия аддитивно заданной полурешетки и верхней полурешетки эквивалентны. См. [2, с. 23–24, упражнения 18 и 20].

Идеалом полурешетки S называется ее идеал как полугруппы, то есть вместе с каждым своим элементом a он содержит *главный идеал* $aS = \{as\colon s\in S\}$. Собственный идеал P полурешетки S ($P\neq S$) называется *простым*, если для любых a, $b\in S$ включение $ab\in P$ влечет $a\in P$ или $b\in P$. Говорят, что в полурешетке S *простые идеалы разделяют элементы* (или S имеет достаточно много простых идеалов), если для любых двух элементов полурешетки S в ней существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с двумя идемпотентными коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, связанными тождествами поглощения $x(x+y) = x$ и $x+xy = x$. При порядковом подходе под *решеткой* понимается упорядоченное множество $\langle S, \leq\rangle$, являющееся одновременно нижней полурешеткой и верхней полурешеткой. Приведенные определения решеток также эквивалентны [2, с. 20–21, теорема 1]. Решетка с тождеством $x(y+z) = xy+xz$, равносильно, с двойственным тождеством $x+yz = (x+y)(x+z)$, называется *дистрибутивной*.

Если полурешетка $\langle S, \cdot\rangle$ имеет наименьший элемент (наибольший элемент), то он называется *нулем* (*единицей*) и обозначается 0 (1, соответственно). В полурешетках элементы 0 и 1 определяются тождествами $0\cdot x = 0$ и $1\cdot x = x$. В решетках $\langle S, +, \cdot\rangle$ к этим тождествам можно добавить соответственно тождества $0+x = x$ и $1+x = 1$.

Дистрибутивная решетка S с нулем 0 и ненулевой единицей 1 называется *булевой решеткой*, если каждый ее элемент a имеет дополнение $b\in S$: $a+b = 1$ и $ab = 0$; дополнение к a единственно и обычно обозначается a'.

Полурешеткой множеств назовем непустое множество S множеств, замкнутое относительно конечных теоретико-множественных пересечений: $A\cap B\in S$ для любых множеств A, $B\in S$. В результате получается полурешетка $\langle S, \cap\rangle$.

Полурешетка множеств S называется *решеткой множеств*, если $A\cup B\in S$ для всех A, $B\in S$. Любая решетка множеств S является дистрибутивной решеткой $\langle S, \cup, \cap\rangle$. Классическая *теорема Биркгофа–Стоуна* [2, с. 93, теорема 19] утверждает, что, с точностью до изоморфизма, все дистрибутивные решетки исчерпываются решетками множеств их простых спектров. Имеет место аналог этой теоремы для произвольных полурешеток (теорема 3).

Через $\mathrm{B}(M)$ обозначим *булеан* произвольного множества M, то есть множество всех подмножеств в M.

Полукольцом называется алгебраическая структура $S \equiv \langle S, +, \cdot\rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон: $x(y+z) = xy+xz$, $(x+y)z = xz+yz$.

Полукольцо S называется:

коммутативным, если операция умножения в S коммутативна;

полукольцом с нулем 0, если $\forall s\in S$ ($s+0 = s$ & $s\cdot 0 = 0\cdot s = 0$);

полукольцом с единицей 1, если $\forall s\in S\ s\cdot 1 = 1\cdot s = s$;

мультипликативно (*аддитивно*) *идемпотентным*, если S удовлетворяет тождеству $xx = x$ ($x+x = x$, соответственно);

идемпотентным, если S мультипликативно идемпотентно и аддитивно идемпотентно;

моно-полукольцом, если в S выполняется тождество $xy = x+y$, то есть операции сложения и умножения полукольца S совпадают;

кольцом, если его аддитивная полугруппа $\langle S, +\rangle$ является группой;

булевым кольцом, если S – мультипликативно идемпотентное кольцо.

Класс полуколец содержит все ассоциативные кольца, все дистрибутивные решетки, основные числовые системы, а класс полуколец с полурешеточным умножением, то есть коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, содержит дистрибутивные решетки и булевы кольца.

Напомним, что непустое подмножество I полукольца S называется его *идеалом*, если для любых элементов a, $b\in I$ и $s\in S$ имеем $a+b$, sa, $as\in I$. Собственный идеал P полукольца S называется *первичным* (*простым*), если для любых элементов a, $b\in S$ включение $aSb\subseteq P$ ($ab\in P$) влечет $a\in P$ или $b\in P$.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение А [1, предложение 4]. *В мультипликативно идемпотентных полукольцах первичные идеалы совпадают с простыми идеалами.*

Предложение Б [1, предложение 5]. *Пусть в мультипликативно идемпотентном полукольце S даны непересекающиеся идеал I и мультипликативная подполугруппа M. Тогда в S существует простой идеал, содержащий I и не пересекающийся с M.*

Предложение В [1, следствие 2]. *Любой идеал произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца является пересечением его простых идеалов.*

Предложение Г [1, предложение 7]. *Для того чтобы полукольцо имело полурешеточное умножение, необходимо и достаточно, чтобы в нем простые идеалы разделяли элементы.*

Первичным спектром $\mathrm{Spec}\,S$ полукольца S называется множество всех его первичных идеалов, наделенное *топологией Стоуна–Зарисского*. Если первичные идеалы полукольца S совпадают с его простыми идеалами, то топологическое пространство $\mathrm{Spec}\,S$ будем называть *простым спектром полукольца S*. В частности, в силу предложения А, к таким полукольцам относятся мультипликативно идемпотентные полукольца.

Напомним подробнее понятие первичного спектра $\mathrm{Spec}\,S$ произвольного полукольца S (см. [4, параграф 3]). Считаем, что $\mathrm{Spec}\,S \neq \varnothing$. Открытыми множествами служат множества $D(A) = \{P\in\mathrm{Spec}\,S$: A не включено в $P\}$ по всем идеалам A полукольца S, а также пустое множество $\varnothing$. В частности $D(S)=\mathrm{Spec}\,S$. Для полукольца S с нулем 0 имеем $D(\{0\}) = \varnothing$.

Обозначим через $\mathrm{Id}\,S$ решетку всех идеалов полукольца S относительно отношения включения $\subseteq$. Решетка $\mathrm{Id}\,S$ *полна сверху*, поскольку любое непустое семейство $(A_i)_{i\in I}$ идеалов в S имеет точная верхняя грань $\vee(A_i)_{i\in I} = \sup(A_i)_{i\in I}$, равную пересечению всех идеалов в S, содержащих $\cup(A_i)_{i\in I}$.

Если $(A_i)_{i\in I}$ – непустое семейство идеалов полукольца S и A, B – идеалы в S, то имеют место равенства:

$$\cup_{i\in I}D(A_i) = D(\sup(A_i)_{i\in I});$$
$$A\subseteq B \Rightarrow D(A)\subseteq D(B);$$
$$D(A)\cap D(B) = D(AB),$$

где AB – идеал в S, состоящий из сумм элементов ab при $a\in A$, $b\in B$.

Для произвольного элемента a полукольца S положим $D(a) = D((a))$, где (a) – наименьший идеал в S, содержащий элемент a. Множества $D(a)$, $a\in S$, образуют базу топологии Стоуна–Зарисского. Первичный спектр $\mathrm{Spec}\,S$ полукольца S является T_0-*пространством*, то есть для любых двух различных первичных идеалов в S в $\mathrm{Spec}\,S$ найдется открытое множество, содержащее ровно один из данных первичных идеалов. Если полукольцо S обладает единицей 1, то топологическое пространство $\mathrm{Spec}\,S = D(1)$ компактно.

Для произвольного топологического пространства X положим: $O(X)$ есть решетка всех открытых множеств (топология) пространства X относительно включения $\subseteq$. Решетка $O(X)$ является *полной* дистрибутивной решеткой, поскольку для всякого непустого семейства $(U_i)_{i\in I}$ открытых множеств пространства X имеем: $\sup(U_i)_{i\in I} = \cup(U_i)_{i\in I}$ и $\inf(U_i)_{i\in I}$ – внутренность множества $\cap(U_i)_{i\in I}$. Открытое множество U топологического пространства X назовем *неприводимым*, если для любого непустого семейства $(U_i)_{i\in I}$ открытых множеств в X из $U = \cup(U_i)_{i\in I}$ следует $U = U_i$ для некоторого индекса $i\in I$. Как видим, понятие неприводимого множества определяется на языке решетки $O(X)$. Неприводимые множества топологического пространства являются компактными открытыми множествами.

Пример 1. Возьмем любую полурешетку множеств $\langle S, \cap\rangle$. Алгебраическая структура $\langle S, \cap, \cap\rangle$ будет идемпотентным моно-полукольцом. При этом полурешетка $\langle S, \cap\rangle$ и полукольцо $\langle S, \cap, \cap\rangle$ обладают одними и теми же идеалами и одинаковыми простыми идеалами.

Пример 2. Рассмотрим произвольную полурешетку множеств $\langle S, \cap\rangle$, содержащую пустое множество $\varnothing$ и хотя бы одно непустое множество. Для любых множеств $A, B\in S$ положим $A+B = \varnothing$. Полученная алгебраическая структура $\langle S, +, \cap\rangle$ является полукольцом с полурешеточным умножением и константным сложением. Полурешетка $\langle S, \cap\rangle$ и полукольцо $\langle S, +, \cap\rangle$ обладают одними и теми же идеалами и одинаковыми простыми идеалами. Поэтому, с учетом примера 1, простые спектры полурешетки $\langle S, \cap\rangle$ и полуколец $\langle S, \cap, \cap\rangle$, $\langle S, +, \cap\rangle$ совпадают, но полукольца $\langle S, \cap, \cap\rangle$ и $\langle S, +, \cap\rangle$ не изоморфны.

Пример 3. Пусть $\mathrm{B}(M)$ – булеан непустого множества M. Относительно отношения включения $\mathrm{B}(M)$ является (булевой) решеткой множеств с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом M. Упорядоченное множество $\langle \mathrm{B}(M), \subseteq\rangle$ служит нижней полурешеткой, ассоциированной с полурешеткой $\langle \mathrm{B}(M), \cap\rangle$, и верхней полурешеткой, ассоциированной с полурешеткой $\langle \mathrm{B}(M), \cup\rangle$. Рассмотрим четыре полукольца с полурешеточным умножением:

1) идемпотентное моно-полукольцо $\langle \mathrm{B}(M), \cap, \cap\rangle$;

2) полукольцо $\langle \mathrm{B}(M), +_\varnothing, \cap\rangle$ с константное сложением $+_\varnothing$ с суммой $\varnothing$;

3) булеву решетку $\langle \mathrm{B}(M), \cup, \cap\rangle$;

4) булево кольцо $\langle \mathrm{B}(M), \oplus, \cap\rangle$, где $\oplus$ – симметрическая разность множеств.

Полукольца 1) – 4) попарно не изоморфны, но имеют общую мультипликативную полугруппу – полурешетку $\langle \mathrm{B}(M), \cap\rangle$. Полукольца 1) и 2), а также полукольца 3) и 4), имеют одинаковые простые спектры. Простые идеалы булевой решетки $\langle \mathrm{B}(M), \cup, \cap\rangle$ являются простыми идеалами полукольца $\langle \mathrm{B}(M), \cap, \cap\rangle$, но не наоборот. Если множество M имеет более одного элемента, то простые спектры полуколец 1) и 3) не гомеоморфны, поскольку Spec $\langle \mathrm{B}(M), \cap, \cap\rangle$ не является хаусдорфовым пространством, а Spec $\langle \mathrm{B}(M), \cup, \cap\rangle$ есть нульмерное компактное хаусдорфово пространство [2, с. 140, следствие 10]. Заметим, что множество $\mathrm{B}(M)\setminus\{M\}$ служит наибольшим простым идеалом полукольца Spec $\langle \mathrm{B}(M), \cap, \cap\rangle$.

Основные результаты

Лемма 1. *Всякая полурешетка является мультипликативной полугруппой идемпотентного моно-полукольца, при этом они имеют одни и те же идеалы и одинаковые простые идеалы.*

Действительно, достаточно задать на полурешетке операцию сложения, совпадающую с умножением.

Простым спектром полурешетки $\langle S, \cdot\rangle$ назовем простой спектр соответствующего идемпотентного моно-полукольца $\langle S, \cdot, \cdot\rangle$.

Лемма 2. *Всякая полурешетка с нулем является мультипликативной полугруппой полукольца с полурешеточным умножением и константным сложением, причем они имеют одни и те же идеалы и одинаковые простые спектры.*

Достаточно на полурешетке с нулем 0 определить константное сложение $x+y=0$.

Следствием предложения Б является

Предложение 1. *Если S – произвольная полурешетка, I – ее идеал и M – непересекающаяся с I подполурешетка в S, то в S найдется простой идеал, содержащий I и не пересекающийся с M.*

Из предложения 1 вытекает

Теорема 1. *В любой полурешетке простые идеалы разделяют ее элементы.*

Лемма 3. *Пусть S – полукольцо с идемпотентным умножением и A, B – его идеалы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $D(A)\subseteq D(B) \Leftrightarrow A\subseteq B$;

(2) $D(A) = D(B) \Leftrightarrow A = B$;

(3) $D(a) = D(b) \Leftrightarrow a = b$ *для любых* $a, b\in S$;

(4) $D(A)\cup D(B) = D(A\vee B)$;

(5) $D(A)\cap D(B) = D(AB) = D(A\cap B)$;

(6) $D(ab) = D(a)\cap D(b)$ *при любых* $a, b\in S$;

(7) *решетка Id S изоморфна решетке O(Spec S).*

Доказательство. (1) Импликация $A\subseteq B \Rightarrow D(A)\subseteq D(B)$ очевидна. Включение $D(A)\subseteq D(B)$ означает, что простые идеалы полукольца S, содержащие идеал B, содержат и идеал A. По предложению В любой идеал полукольца S является пересечением всех содержащих его простых идеалов их S. Поэтому верна и обратная импликация $D(A)\subseteq D(B) \Rightarrow A\subseteq B$.

(2) следует из (1).

(3) следует из (2).

(4) вытекает из аналогичного свойства первичного спектра полуколец.

(5) Как легко видеть, имеем $A\cap B = AB$. Остается применить соответствующее свойство первичного спектра полуколец.

(6) вытекает из (5).

(7) является следствием утверждения (1), также вытекает из (2), (4), (5).

Предложение 2. *Для произвольной полурешетки S справедливы следующие утверждения:*

(1) *идеалы полурешетки S совпадают с теоретико-множественными объединениями ее главных идеалов;*

(2) *для любого непустого семейства $(A_i)_{i\in I}$ идеалов полурешетки S верно равенство $D(\cup(A_i)_{i\in I}) = \cup D(A_i)_{i\in I}$;*

(3) *множества $D(a)$, $a\in S$, и пустое множество суть в точности неприводимые множества простого спектра Spec S.*

Доказательство. Можно считать, что S – неодноэлементная полурешетка. По теореме 1 Spec $S \neq \varnothing$. Простой спектр полурешетки S обладает всеми свойствами первичных спектров полуколец, в частности Spec S является T_0-пространством.

(1) Всякий идеал полурешетки S совпадает с объединением содержащихся в нем главных идеалов. Очевидно, что объединение любого непустого семейства главных идеалов $aS = \{x\in S\colon x\le a\}$, $a\in S$, полурешетки S является ее идеалом. Поэтому объединение любого непустого семейства идеалов полурешетки S также будет идеалом в S.

(2) следует из аналогичного свойства первичного спектра полуколец в силу утверждения (1).

(3) Возьмем элемент $a\in S$ и предположим, что $D(a) = \cup U_i$ – объединение открытых множеств U_i топологического пространства Spec S, индексированных элементами непустого множества I. Для каждого индекса $i\in I$ имеем $U_i = D(A_i)$ для подходящего идеала A_i полурешетки S. Тогда $D(aS) = D(a) = \cup D(A_i) = D(\cup A_i)$ в силу утверждения (2), откуда $aS = \cup A_i$ по лемме 3(2), стало быть, $aS\subseteq A_i$ для некоторого индекса $i\in I$. Значит, $aS = A_i$ для указанного индекса i, и $D(a) = U_i$. Поэтому открытое множество $D(a)$ неприводимо.

Обратно, рассмотрим непустое неприводимое множество U простого спектра Spec S полурешетки S. Имеем $U = D(A)$ для некоторого идеала A в S. Тогда $U = \cup D(a)$ по всем элементам $a\in A$. Поэтому $U = D(a)$ для некоторого $a\in A$.

Предложение 3 (мультипликативное представление Стоуна). *Любое полукольцо S с полурешеточным умножением допускает мультипликативно изоморфное вложение S в булеан B (Spec S).*

Доказательство. Пусть дано полукольцо $S \equiv \langle S, +, \cdot\rangle$ с полурешеточным умножением. Рассмотрим отображение D: $S\to$B(Spec S), переводящее каждый элемент $a\in S$ в подмножество $D(a) = \{P\in \text{Spec } S: a\notin P\}$ простого спектра Spec S полукольца S. В силу утверждений (3) и (6) леммы 3 отображение D осуществляет изоморфное вложение полурешетки $\langle S, \cdot\rangle$ в полурешетку множеств B(Spec S) с операцией пересечения множеств, при этом полурешетка $\langle S, \cdot\rangle$ изоморфна подполурешетке множеств $\{D(a): a\in S\}$ полурешетки $\langle$B(Spec S), $\cap\rangle$. См. также замечание 4 в конце статьи.

Теорема 2 (представление). *Любая полурешетка (с нулем) изоморфна некоторой полурешетке множеств ее простого спектра (с пустым множеством, соответственно).*

Доказательство. Пусть $S \equiv \langle S, \cdot\rangle$ – произвольная полурешетка. Если она одноэлементна, то изоморфна любой одноэлементной полурешетке множеств, скажем, $\{\varnothing\}$. Будем считать полурешетку S неодноэлементной. По определению ее простой спектр Spec S есть простой спектр идемпотентного моно-полукольца $\langle S, \cdot, \cdot\rangle$. Тогда по предложению 3 полурешетка S изоморфна полурешетке множеств $\{D(a): a\in S\}\subseteq$ Spec S. Если полурешетка S обладает нулем 0, то полурешетка множеств $\{D(a): a\in S\}$ содержит $\varnothing = D(0)$ в качестве нуля.

Отметим, что полурешетка множеств $\{D(s): s\in S\}$ *приведенная*, то есть любые точки $P \neq Q$ простого спектра Spec $S = D(S) = \cup\{D(s): s\in S\}$ разделяются множеством $D(a)$ для некоторого $a\in S$, именно, для всякого элемента a, принадлежащего ровно одному из простых идеалов P или Q.

Теорема 3 (определяемость). *Произвольные полурешетки S и T изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их простые спектры Spec S и Spec T.*

Доказательство. Ясно, что изоморфные полурешетки имеют гомеоморфные простые спектры.

Обратно, пусть для полурешеток S и T топологические пространства Spec S и Spec T гомеоморфны. Тогда изоморфны решетки O(Spec S) и O(Spec T). По лемме 3(6) и предложению 2(3) будут также изоморфны полурешетки $\langle\{D(s): s\in S\}, \cap\rangle$ и $\langle\{D(t): t\in T\}, \cap\rangle$. Остается к полурешеткам S и T применить представление D (теорема 2).

Подполурешетка A полурешетки S называется ее *ретрактом*, если существует гомоморфизм полурешетки S на полурешетку A, тождественный на A.

Теорема 4 (ретрактность). *Всякая конечная цепь служит ретрактом любой содержащей ее как подполурешетку полурешетки.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n\}$ – конечная цепь, являющаяся подполурешеткой полурешетки S. В силу предложения 1 возьмем в полурешетке S произвольный простой идеал P_1, содержащий идеал a_n+S и не содержащий элемент a_{n-1}. Снова по предложению 1 выберем простой идеал P_2 в S, содержащий идеал $(a_{n-1}+S)\cup P_1$ и не содержащий элемент a_{n-2}. Действуя аналогичным образом далее, получим в полурешетке S цепочку простых идеалов $P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_{n-1}$, таких, что $a_{n-k+1} \in P_k$ и $a_{n-k} \notin P_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Разбиение $\{P_1, P_2\backslash P_1, \ldots, P_{n-1}\backslash P_{n-2}, S\backslash P_{n-1}\}$ определяет конгруэнцию на полурешетке S, фактор-полурешетка по которой изоморфна цепи A. Поэтому A будет ретрактом полурешетке S.

В связи с теоремой 4 возникает следующая

Задача. Описать полурешетки, служащие ретрактами всех содержащих их полурешеток в качестве подполурешеток.

Применение к полукольцам с полурешеточным умножением

На основании теоремы 2 получаем:

Следствие 1. *С точностью до изоморфизма идемпотентные моно-полукольца совпадают с полукольцами* $\langle S, \cap, \cap\rangle$ *из примера* 1.

Следствие 2. *С точностью до изоморфизма полукольца с полурешеточным умножением и константным сложением совпадают с полукольцами* $\langle S, +, \cap\rangle$ *из примера* 2.

Следующие два утверждения вытекают из теоремы 3, поскольку в случае полукольца S, являющегося идемпотентным моно-полукольцом или полукольцом с полурешеточным умножением и константным сложением, простой спектр $\operatorname{Spec} S$ совпадает с простым спектром его мультипликативной полугруппы (леммы 1 и 2), которая полностью определяет само полукольцо S.

Следствие 3. *Изоморфность идемпотентных моно-полуколец эквивалентна гомеоморфности их простых спектров.*

Следствие 4. *Изоморфность полуколец с полурешеточным умножением и константным сложением равносильна гомеоморфности их простых спектров.*

Замечания

Сделаем ряд замечаний, дополняющих основной текст статьи.

1. На произвольной полурешетке $\langle S, *\rangle$, как идемпотентной коммутативной полугруппе с бинарной операцией $*$, вводятся два отношения порядка $\le_*$ и $\le^*$, превращающие ее, соответственно, в нижнюю полурешетку и верхнюю полурешетку. Именно, $x \le_* y$ означает $x*y = x$ и $x \le^* y$ означает $x*y=y$ для любых $x, y \in S$. Порядки $\le_*$ и $\le^*$ двойственны друг и другу и их пересечение есть отношение равенства. См. [2, с. 23–24, упражнение 19].

2. В обзорной статье "Полугруппы" справочной книги [3, с. 32] указано, что любая полурешетка S вложима в полурешетку $\langle \mathrm{B}(S), \cap\rangle$, стало быть, изоморфна соответствующей полурешетке множеств. В самом деле, сопоставляя каждому элементу a полурешетки S ее главный идеал aS, получаем изоморфное вложение S в полурешетку $\langle \mathrm{B}(S), \cap\rangle$, поскольку, как легко проверить, $aS\cap bS = (ab)S$ и $aS = bS \Rightarrow a=b$ для любых элементов $a, b \in S$.

3. Изоморфное вложение D: $S \to \mathrm{B}(\operatorname{Spec} S)$ полурешетки S в полурешетку $\langle \mathrm{B}(\operatorname{Spec} S), \cap\rangle$ является полурешеточной вариацией *представления Стоуна* D дистрибутивных решеток. Действительно, пусть $S \equiv \langle S, +, \cdot\rangle$ – произвольная дистрибутивная решетка, Spec S – ее простой спектр (как полукольца) и D: $S\to\mathrm{B}(\mathrm{Spec}\, S)$, $a\to D(a) = \{P\in \mathrm{Spec}\, S\colon a\notin P\}$ для всех $a\in S$. По теореме 2 имеем изоморфное вложение полурешетки $\langle S, \cdot\rangle$ в полурешетку $\langle \mathrm{B}(\mathrm{Spec}\, S), \cap\rangle$. Легко видеть, что $D(a+b) = D(a)\cup D(b)$ для любых a, $b\in S$. Поэтому дистрибутивная решетка S изоморфна решетке множеств $\{D(a)\colon a\in S\}$ – подрешетке булеана $\langle \mathrm{B}(\mathrm{Spec}\, S), \cup, \cap\rangle$. Кроме того, конечно-порожденные идеалы дистрибутивной решетки S являются главными, поскольку $aS+bS = (a+b)S$ для всех a, $b\in S$. Поэтому множества $D(a)$, $a\in S$, совпадают с компактными открытыми множествами простого спектра Spec S.

Отметим также, что в случае дистрибутивной решетки $\langle S, +, \cdot\rangle$ представление $a\to aS$ ($a\in S$) из замечания 2 не обязано переводить сумму в объединение, так как $(a+b)S = aS+bS\neq aS\cup bS$ для несравнимых элементов a, $b\in S$, то есть при $a \neq ab \neq b$.

4. Возьмем произвольное полукольцо $S \equiv \langle S, +, \cdot\rangle$ с полурешеточным умножением. В силу предложения 3 стоуново представление D осуществляет изоморфное вложение полурешетки $\langle S, \cdot\rangle$ в полурешетку $\langle \mathrm{B}(\mathrm{Spec}\, S), \cap\rangle$. А как обстоит дело с множеством $D(a+b)$ для элементов a, $b\in S$? Ясно, что $D(a+b)\subseteq D(a)\cup D(b)$. Если S – моно-полукольцо, то $D(a+b) = D(a)\cap D(b)$ для всех a, $b\in S$. Если S – полукольцо с константным сложением, то $D(a+b) = \varnothing$ для любых a, $b\in S$. Для дистрибутивной решетки S тождественно $D(a+b) = D(a)\cup D(b)$ по замечанию 3. Для булева кольца S тождественно $D(a+b) = D(a)\oplus D(b)$, причем, $D(a+a) = D(0) = \varnothing$.

5. В книге Гретцера даны определения дистрибутивной верхней полурешетки [2, с. 135] и простого идеала в таких полурешетках [2, с. 135]. Соответствующий простой спектр $\mathrm{P}(S)$ дистрибутивной верхней полурешетки S назван *стоуновым пространством полурешетки* S [2, с. 136]. Для них доказана теорема определяемости [2, с. 137, теорема 5]: две дистрибутивные верхние полурешетки изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их стоуновы пространства. В силу замечания 3 дистрибутивные решетки также определяются своими простыми спектрами. Наша теорема 3 является определенным аналогом этих результатов.

6. В дополнение к теореме 4 отметим, что, как нетрудно видеть, любая полурешетка, являющаяся ретрактом всех содержащих ее полурешеток в качестве подполурешетки, имеет наименьший и наибольший элементы. Цепи натуральных, отрицательных целых и всех целых чисел не являются ретрактами цепи S целых чисел, пополненной наименьшим и наибольшим элементами, в то время как сама цепь S будет ретрактом любой полурешетки, содержащей S как подполурешетку.

7. В статье [4] изучались свойства полурешеток, являющихся аддитивными полугруппами идемпотентных полуколец с единицей.

Авторы выражают благодарность профессору Е. М. Вечтомову за постановку задач и внимание к нашей работе.

Список источников

1. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Простые идеалы в мультипликативно идемпотентных полукольцах // Математические заметки. 2022. Т.111, вып. 4. С. 494–505. DOI: 10.4213/mzm13343. EDN: QXOMSE.
2. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1981. 456 с.
3. *Общая* алгебра / Салий В. Н., Скорняков Л. А. / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Физ.-мат. лит.: Наука, 1991. Т. 2. 480 с.
4. *Петров А. А., Шкляев А. П.* Об аддитивных полугруппах идемпотентных полуколец с единицей // Математические заметки. 2024. Т.116, вып. 4. С. 552–558. DOI: 10.4213/mzm14329. EDN: HVSYTL.

5. *Чермных В. В.* Функциональные представления полуколец. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с. ISBN 978-5-93825-882-2.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
7. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 381 p.

References

1. Vechtomov, E. M. and Petrov, A. A. (2022) "Completely Prime Ideals in Multiplicatively Idempotent Semirings", *Mathematical Notes*, vol. 111, no 4, pp. 494–505.
2. Grätzer, G. (1982), *Obshchaya teoriya reshetok* [General lattice theory], Mir, Moscow, Russia.
3. Skornyakov, L. A. (1991), *Obshchaya algebra. T. 2*, [General Algebra, V. 2], Nauka, Moscow, Russia.
4. Petrov, A. A. and Shklyaev, A. P. (2024) "On Additive Semigroups of Idempotent semirings with Identity", *Mathematical Notes*, vol. 116, no 4, pp. 552–558.
5. Chermnykh, V. V. (2010), *Funkcional'nye predstavleniya polukolec*, [Functional representations of semirings], Izd. VyatGGU, Kirov, Russia
6. Engelking, R. (1986), Obshchaya *topologiya*, [General topology], Mir, Moscow, Russia.
7. Golan, J. S. (1999), *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Информация об авторах:

А. А. Петров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, д. 36), AuthorID: 662310;

А. П. Шкляев – бакалавр четвертого года обучения по направлению "Математика и компьютерные науки", Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, д. 36).

Information about the authors:

A. A. Petrov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 662310;

A. P. Shklyaev – Bachelor of the fourth year of study in the field of Mathematics and Computer Science, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000).